12/08/2014

Sumas inferiores y superiores

Denotaremos por $\underline{S}(f)$ al conjunto de todas las sumas inferiores de una función f (definida sobre el rectángulo R) y como $\overline{S}(f)$ al conjunto de todas las sumas superiores, i, e:

$$\underline{S}(f) = \{\underline{S}(f,P) \mid P \in P_R\}$$
$$\overline{S}(f) = \{\overline{S}(f,P) \mid P \in P_R\}$$

Por otro lado, al supremo del conjunto $\underline{S}(f)$ lo llamaremos la integral inferior de f sobre R, y lo denotaremos por $\underline{\int}_R f$, y al ínfimo del conjunto $\overline{S}(f)$ lo llamaremos la integral superior de f sobre R, y lo denotaremos por $\overline{\int}_R f$, i, e:

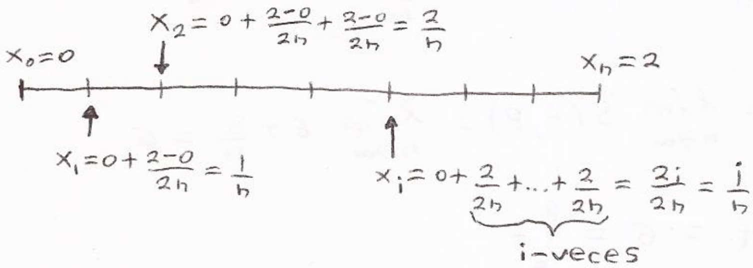
$$\underline{\int}_R f = \sup\{\underline{S}(f)\}$$
$$\overline{\int}_R f = \inf\{\overline{S}(f)\}$$

Ejercicio

Calcular $\underline{\int}_R$ y $\overline{\int}_R$ para $f(x,y) = x+4y$ y $R = [0,2]\times[0,1]$.

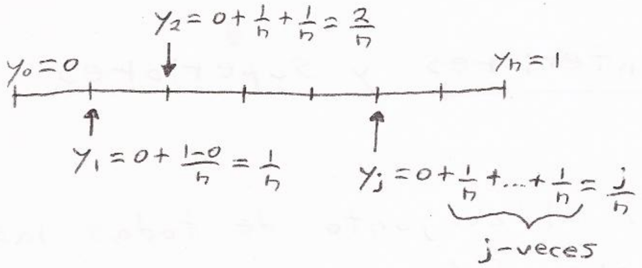
Sol.

Tenemos que para $[0,2]$ consideramos una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ con longitud $\frac{2-0}{2n} = \frac{1}{n}$



$$\Rightarrow \quad x_i = \frac{i}{n}, \qquad x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$$

Mientras que para $[0,1]$ consideramos una partición $P = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ con longitud $\frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$



$$\Rightarrow \quad y_j = \frac{j}{n}, \qquad y_{j-1} = \frac{j-1}{n}$$

$\therefore\ \forall R_{ij}$, $M_{ij} = \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\} = x_i + 4y_j$

y $m_{ij} = \inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\} = x_{i-1} + 4y_{j-1}$ $\therefore$

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{n} (x_{i-1} + 4y_{j-1})\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n} + \frac{4(j-1)}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{n} (i + 4j - 5) = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{2n} \left(in + \frac{4n(n+1)}{2} - 5n\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{2n} (i + 2(n+1) - 5)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\frac{2n(2n+1)}{2} + 2n(2(n+1)-5)\right) = \frac{1}{n^2}\left(n(2n+1) + 4n^2 - 6n\right) = \frac{1}{n^2}(6n^2 - 5n)$$

$$= 6 - \frac{5}{n}$$

$$\therefore\ \underline{\int}_R f = \sup\{\underline{S}(f,P)\} = \lim_{n \to \infty} \underline{S}(f,P) = \lim_{n \to \infty} 6 - \frac{5}{n} = 6$$

Ahora bien, para $\overline{\int}_R$ se tiene que:

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{n} (x_i + 4y_j)\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{i}{n} + \frac{4j}{n}\right) = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{n} (i + 4j)$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{2n} \left(in + \frac{4n(n+1)}{2}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{2n} (i + 2(n+1)) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{2n(2n+1)}{2} + 2n(2(n+1))\right)$$

$$= \frac{1}{n}(2n + 1 + 4n + 4) = \frac{1}{n}(6n + 5) = 6 + \frac{5}{n}$$

$$\therefore\ \overline{\int}_R f = \inf\{\overline{S}(f,P)\} = \lim_{n \to \infty} \overline{S}(f,P) = \lim_{n \to \infty} 6 + \frac{5}{n} = 6$$

$$\therefore\ \underline{\int}_R f = \overline{\int}_R f = 6 = \int_R f$$

12/08/2014

Ejercicio

Calcular $\underline{\int}_R$ y $\overline{\int}_R$ para $f(x,y)=3x^2+2y$ y $R=[0,3]\times[0,1]$.

Sol.

Tenemos que para $[0,3]$ consideramos una partición $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ con longitud $\frac{3-0}{3n}=\frac{1}{n}$, y para $[0,1]$ consideramos una partición $P=\{y_0,y_1,\dots,y_n\}$ con longitud $\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$, de donde podemos obtener $x_i=\frac{i}{n}$, $x_{i-1}=\frac{i-1}{n}$, $y_j=\frac{j}{n}$ y $y_{j-1}=\frac{j-1}{n}$

$\therefore \forall R_{ij}$, $M_{ij}=\sup\{f(x,y)\mid(x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\}=3x_i^2+2y_j$ y

$m_{ij}=\inf\{f(x,y)\mid(x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\}=3x_{i-1}^2+2y_{j-1}$

$$\Rightarrow \underline{S}(f,P)=\sum_{i=1}^{3n}\sum_{j=1}^{n}(3x_{i-1}^2+2y_{j-1})\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{3n}\sum_{j=1}^{n}\left(3\left(\frac{i-1}{n}\right)^2+2\left(\frac{j-1}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{3n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{3}{n}(i^2-2i+1)+2j-2\right)=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{3n}\left(3(i^2-2i+1)+2\frac{n(n+1)}{2}-2n\right)$$

$$=\frac{1}{n^3}\left(\frac{3}{6}(3n(3n+1)(6n+1))-6\left(\frac{3n(3n+1)}{2}\right)+3(3n)+3n\left(\frac{2n(n+1)}{2}-2n\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n^3}\left(\frac{3}{2}(n(3n+1)(6n+1))-9n(3n+1)+9n+3n^2(n+1)-6n^2\right)$$

$$=\frac{1}{n^3}\left(\frac{3}{2}(18n^3+9n^2+n)-27n^2-\cancel{9n}+\cancel{9n}+3n^3+\cancel{3n^2}-\cancel{6n^2}\right)$$

$$=30-\frac{33}{2}\frac{1}{n}+\frac{3}{2}\frac{1}{n^2}$$

$$\therefore \underline{\int}_R f=\sup\{\underline{S}(f,P)\}=\lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,P)=\lim_{n\to\infty}30+\frac{3}{2n^2}-\frac{33}{2n}=30$$

Por otro lado,

$$\overline{S}(f,P)=\sum_{i=1}^{3n}\sum_{j=1}^{n}(3x_i^2+2y_j)\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{3n}\sum_{j=1}^{n}\left(3\left(\frac{i}{n}\right)^2+2\left(\frac{j}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{3n}\left(3i^2+2\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{1}{n^3}\left(\frac{3}{6}(3n(3n+1)(6n+1))+3n(n(n+1))\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{2}(54n^2+27n+3)+3n^2+3n\right)=30+\frac{33}{2n}+\frac{3}{2n^2}$$

$$\therefore \overline{\int_B} f = \inf\{\overline{S}(f,P)\} = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,P) = \lim_{n\to\infty} 30 + \frac{33}{2n} + \frac{3}{2n^2} = 30$$

$$\therefore \underline{\int_B} f = \overline{\int_B} f = 30 = \int_B f$$

Ejercicio

Sea $f: B=[0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ ó } y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \text{ y } y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

f es integrable en B?

Sol.

Obsérvese que si P es cualquier partición del rectángulo B, y B_i es cualquier subrectángulo inducido por esta partición, $\Rightarrow$ sobre dicho subrectángulo siempre existen parejas (x,y) $\ni$ x ó $y \in \mathbb{Q}$, y parejas (x,y) $\ni$ x y $y \notin \mathbb{Q}$, $\Rightarrow M_{ij} = 1$ y $m_{ij} = 0$ de tal forma que $\overline{S}(f,P) = 1$ y $\underline{S}(f,P) = 0$ para cualquier partición P de B. De esta forma, se tiene que $\underline{S}(f) = \{0\}$ y $\overline{S}(f) = \{1\}$ por lo que $\underline{\int_B} f = 0$ y $\overline{\int_B} f = 1$.

$\therefore$ como $\underline{\int_B} \neq \overline{\int_B}$ $\Rightarrow$ f no es integrable en B ▲

Ejercicio

Sea $B = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ un rectángulo en $\mathbb{R}^n$.

Demostrar que:

a) Si $b_i - a_i < \delta \quad \forall i=1,\ldots,n \quad \Rightarrow d(B) < \sqrt{n}\,\delta$

b) Si $\bar{x},\bar{y} \in B \quad \Rightarrow \|\bar{x}-\bar{y}\| \leq d(B)$

c) Si $\bar{x}_0 \in B$ y $r > d(B) \quad \Rightarrow B \subset B(\bar{x}_0, r)$

Nota: a $d(B)$ se le llama diagonal de B y está dado por $d(B) = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + \ldots + (b_n-a_n)^2}$

12/08/2014

Sol.

a) Como $b_i - a_i < \delta \Rightarrow (b_i - a_i)^2 < \delta^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2 < \sum_{i=1}^{n} \delta^2 = n\delta^2$

$\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2} < \sqrt{n\delta^2} = \sqrt{n}\,\delta$, pero el término de la izquierda de la desigualdad es $d(R) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}$

$\therefore\ d(R) < \sqrt{n}\,\delta$ ▲

b) Sean $\bar{x}, \bar{y} \in R$ con $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$ $\Rightarrow$ se tiene que $a_i \leq x_i \leq b_i$ y $a_i \leq y_i \leq b_i$ sin importar que x_i sea $>, <$ ó $=$ que y_i $\Rightarrow -b_i \leq -y_i \leq -a_i$

$\therefore\ a_i - b_i \leq x_i - y_i \leq b_i - a_i \Rightarrow (x_i - y_i)^2 \leq (b_i - a_i)^2$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}$

lo que implica que $\|\bar{x} - \bar{y}\| \leq d(R)$ ▲

c) Como tenemos que demostrar que $R \subset B(\bar{x}_0, r)$, basta con demostrar que si para $\bar{x} \in R$ arbitrario, $\Rightarrow \|\bar{x}_0 - \bar{x}\| < r$; pero esto es trivial, ya que se sigue de b), i,e

$\|\bar{x}_0 - \bar{x}\| \leq d(R) < r \quad \therefore\ \|\bar{x}_0 - \bar{x}\| < r \quad \therefore\ R \subset B(\bar{x}_0, r)$ ▲