21/10/2014

3er. Parcial

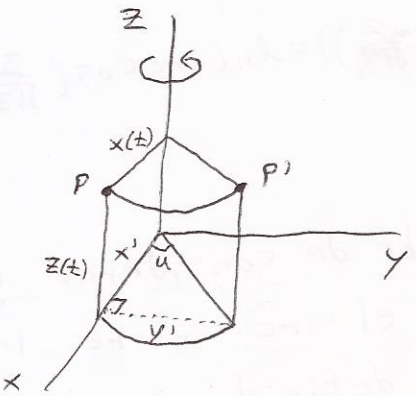
1) Parametrizar la superficie que se obtiene al girar alrededor del eje z y en el sentido positivo, el círculo $x^2-6x+z^2+5=0$.

Sol.

$x^2-6x+z^2+5=0 \Rightarrow x^2-6x+9+z^2+5-9=0 \Rightarrow (x-3)^2+z^2=4$

es un círculo de radio 2 con centro en $(3,0,0)$ en el plano xz.

Sea $\gamma(t)=(x(t),0,z(t))$ una trayectoria en el plano xz, al hacerla girar en torno al eje z obtendremos las coordenadas en base a lo siguiente:



$\cos u = \dfrac{x'}{x(t)}$, $\operatorname{sen} u = \dfrac{y'}{x(t)}$

$\Rightarrow \phi(t,u)=(x(t)\cos u, x(t)\operatorname{sen} u, z(t)) \quad \dots (1)$

$t\in[a,b]$, $u\in[0,2\pi]$

es una parametrización para dicha superficie de revolución.

Como tenemos $(x-3)^2+z^2=4 \Rightarrow$ sea $\gamma(t)=(3+2\cos t, 0, 2\operatorname{sen} t)$ una parametrización del círculo, con $t\in[0,2\pi]$

$\Rightarrow$ de (1) se sigue que

$\phi(t,u)=((3+2\cos t)\cos u, (3+2\cos t)\operatorname{sen} u, 2\operatorname{sen} t)$ $\quad t,u\in[0,2\pi]$

es la parametrización pedida.

2) Hallar la ec. para el plano tangente a la superficie dada en el punto dado.

$x = u^2 \quad y = u\,\text{Sen}(e^v) \quad z = \frac{1}{3}u\,\text{Cos}(e^v)$, en $(13, -2, 1)$

Sol.

$T_u = (2u, \text{sen}(e^v), \frac{1}{3}\text{Cos}(e^v))$

$T_v = (0, ue^v\text{Cos}(e^v), -\frac{u}{3}e^v\text{Sen}(e^v))$

$\Rightarrow N(u,v) = (-\frac{u}{3}e^v, \frac{2}{3}u^2e^v\text{Sen}(e^v), 2u^2e^v\text{Cos}(e^v))$

Método 1)

Como $u^2 = 13$

$u\,\text{Sen}(e^v) = -2 \qquad \Rightarrow u = \sqrt{13}$

$\frac{1}{3}u\,\text{Cos}(e^v) = 1 \qquad v = \ln(\text{arcsen}(\frac{-2}{\sqrt{13}})) = \ln(\text{arcCos}(\frac{3}{\sqrt{13}}))$

$= \begin{cases} 3.51 = \alpha \\ -0.53 = \beta \end{cases}$

En la 1era. igualdad de v, en el argumento del $\ln$, el arcsen resulta negativo, por lo cual hay que tomar el valor absoluto para que el logaritmo quede definido, y en la segunda igualdad de v no hay ningún problema, pues el arcCos resulta positivo.

Por otro lado, hay 2 resultados, α, β, α se obtiene si se resuelve el problema usando una base en grados y β una base en radianes.

$\Rightarrow N(\sqrt{13}, \gamma) = (-\frac{\sqrt{13}}{3}e^\gamma, \frac{26}{3}e^\gamma\text{Sen}(e^\gamma), 26e^\gamma\text{Cos}(e^\gamma))$ con $\gamma = \alpha$ ó β

$\therefore \Pi = N(\sqrt{13}, \gamma)\cdot(x-13, y+2, z-1) = 0$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{13}}{3}e^\gamma(13-x) + \frac{26}{3}e^\gamma\text{Sen}(e^\gamma)(y+2) + 26e^\gamma\text{Cos}(e^\gamma)(z-1) = 0$

con $\gamma = \alpha$ ó β según corresponda es la ecuación del plano.

21/10/2014

Método 2)

$$N(u,v) = \left(-\frac{u}{3}e^{v}, \frac{2}{3}u^{2}e^{v}\,\text{Sen}(e^{v}), 2u^{2}e^{v}\cos(e^{v})\right)$$

$$= -\frac{u}{3}e^{v}\left(1, -2u\,\text{Sen}(e^{v}), -6u\cos(e^{v})\right) \cdots ①$$

Como $u\,\text{Sen}(e^{v}) = -2$ y $\frac{1}{3}u\cos(e^{v}) = 1$

$\Rightarrow ① = -\frac{u}{3}e^{v}\left(1, -2(-2), -6(3)\right) = -\frac{u}{3}e^{v}(1, 4, -18)$

omitiendo el factor en común llegamos a

$\Pi = (1,4,-18)\cdot(x-13, y+2, z-1) = 0$

$\Rightarrow x - 13 + 4y + 8 - 18z + 18 = 0$

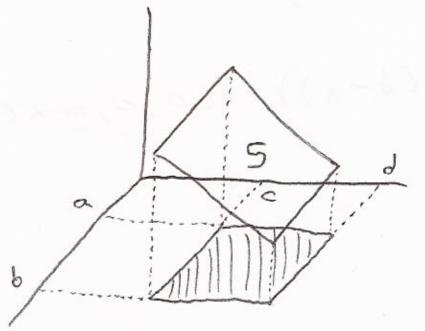
$\Rightarrow x + 4y - 18z + 13 = 0$ es la ec. del plano buscado.

3) Sea S un paralelogramo de lados no paralelos a ningún eje coordenado. Sean S_1, S_2, S_3 las áreas de las proyecciones de S sobre los planos coordenados. Demostrar que el área de S es

$$\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}.$$

Sol.

Sea $f(u,v) = (u, v, \alpha u + \beta v + \gamma)$ $u \in [a,b]$, $v \in [c,d]$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ una parametrización del paralelogramo S.



Con vértices:

$(a, c, \alpha a + \beta c + \gamma)$
$(b, c, \alpha b + \beta c + \gamma)$
$(a, d, \alpha a + \beta d + \gamma)$
$(b, d, \alpha b + \beta d + \gamma)$

$\Rightarrow T_u = (1, 0, \alpha)$

$T_v = (0, 1, \beta) \quad \Rightarrow N(u,v) = (-\alpha, -\beta, 1) \quad \Rightarrow \|N\| = \sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}$

$\therefore \; A(S) = \int_a^b \int_c^d \sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}\, dv\, du = \sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}\,(b-a)(d-c) \; \ldots \; ①$

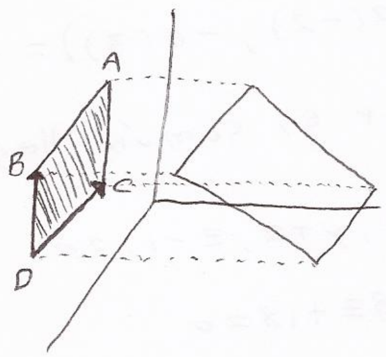
Si proyectamos sobre el plano xz $\Rightarrow$ los vértices de S son:

$(a, 0, \alpha a+\beta c+\gamma) = A$

$(b, 0, \alpha b+\beta c+\gamma) = B$

$(a, 0, \alpha a+\beta d+\gamma) = C$

$(b, 0, \alpha b+\beta d+\gamma) = D$



Haciendo $B-D = -(D-B) = -(0,0,\beta(d-c)) = (0,0,-\beta(d-c))$

$C-D = -(D-C) = -(b-a, 0, \alpha(b-a)) = (-(b-a), 0, -\alpha(b-a))$ y

$\Rightarrow N = (0, \beta(b-a)(d-c), 0)$

$\Rightarrow \|N\| = \beta(b-a)(d-c) \equiv S_1$

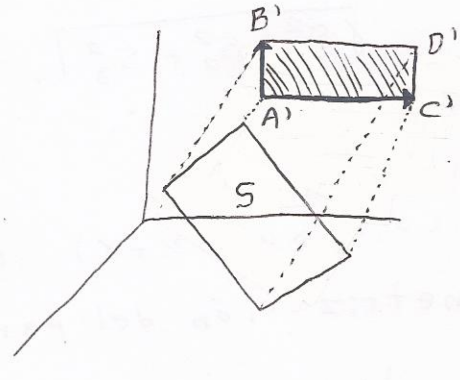
En el plano yz tenemos:

$(0, c, \alpha a+\beta c+\gamma) = A'$

$(0, c, \alpha b+\beta c+\gamma) = B'$

$(0, d, \alpha a+\beta d+\gamma) = C'$

$(0, d, \alpha b+\beta d+\gamma) = D'$



Haciendo

$B'-A' = (0,0,\alpha(b-a))$ y

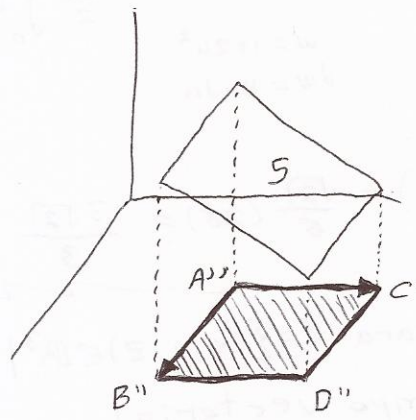
$C'-A' = (0, d-c, \beta(d-c))$

$\Rightarrow N = (-\alpha(b-a)(d-c), 0, 0)$

$\Rightarrow \|N\| = \alpha(b-a)(d-c) \equiv S_2$

21/10/2014

Y para el plano xy tenemos:



$(a,c,0) = A''$
$(b,c,0) = B''$
$(a,d,0) = C''$
$(b,d,0) = D''$

Haciendo $C'' - A'' = (0, d-c, 0)$ y
$B'' - A'' = (b-a, 0, 0)$

$\Rightarrow N = (0, 0, -(b-a)(d-c)) \Rightarrow \|N\| = (b-a)(d-c) \equiv S_3$

Ahora, haciendo $\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} = \sqrt{\beta^2(b-a)^2(d-c)^2 + \alpha^2(b-a)^2(d-c)^2 + (b-a)^2(d-c)^2}$

$$= \sqrt{(b-a)^2(d-c)^2(1+\alpha^2+\beta^2)}$$

$$= \sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}\,(b-a)(d-c)$$

en donde se verifica que esto último es igual a 1

$\therefore\ A(S) = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$

4) Calcular la integral de superficie para $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y\}$ limitada por $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=1$ sobre el campo escalar $\rho(x,y,z) = x$.

Sol.

Hagamos $\phi(u,v) = (u, v, u^2+v)$ $u \in [0,2]$, $v \in [0,1]$ una parametrización de S.

$\rho(\phi) = u$

$T_u = (1, 0, 2u)$
$T_v = (0, 1, 1)$ $\Rightarrow N(u,v) = (-2u, -1, 1) \Rightarrow \|N\| = \sqrt{2+4u^2}$

$$\Rightarrow A(S) = \int_0^2 \int_0^1 u\sqrt{2+4u^2}\, dv\, du = \sqrt{2}\int_0^2 u\sqrt{1+2u^2}\, du = \frac{\sqrt{2}}{4}\int w^{1/2} dw$$

$w = 1+2u^2$
$dw = 4u\,du$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\,\frac{2}{3}\,(1+2u^2)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{\sqrt{2}}{6}(27-1) = \frac{\sqrt{2}}{6}(26) = \frac{13\sqrt{2}}{3}$$

5) Calcular la integral de superficie para $S=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2+y^2\}$ limitada por $z=0$, $z=1$ sobre el campo vectorial $F(x,y,z) = (y,x,z)$.

Proponemos $\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{Sen}\theta, r^2)$ una parametrización de S, donde $r^2 = z \Rightarrow r = \sqrt{z}$, si $z=0 \Rightarrow r=0$
si $z=1 \Rightarrow r=1$

$\therefore r\in[0,1]$ y $\theta\in[0,2\pi]$.

$F(\phi) = (r\operatorname{Sen}\theta, r\cos\theta, r^2)$

$\Rightarrow T_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 2r)$

$T_\theta = (-r\operatorname{Sen}\theta, r\cos\theta, 0)$ $\Rightarrow N(r,\theta) = (-2r^2\cos\theta, -2r^2\operatorname{Sen}\theta, r)$

$$\Rightarrow A(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, r^2)\cdot(-2r^2\cos\theta, -2r^2\operatorname{sen}\theta, r)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-4r^3\operatorname{sen}\theta\cos\theta + r^3)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3(-4\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 1)\, dr\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(-4\operatorname{Sen}\theta\cos\theta + 1)\, d\theta$$

$u = \cos\theta$
$du = -\operatorname{Sen}\theta\, d\theta$

$$= \frac{1}{4}\left[4\int u\,du + \theta\Big|_0^{2\pi}\right] = \frac{1}{4}\left[4\,\cancel{\frac{\cos^2\theta}{2}\Big|_0^{2\pi}}^{\,0} + 2\pi\right] = \frac{1}{4}2\pi = \frac{\pi}{2}$$