30/10/2014

Dado $F(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ campo vectorial, existirá un campo vectorial $G(x,y,z)=(L(x,y,z),M(x,y,z),N(x,y,z))$ diferenciable $\ni$ $F=\nabla\times G$?

La respuesta a esta cuestión es sí y sólo sí F es un campo "solenoidal", i,e, sii $\nabla\cdot F=0$, en donde las componentes de G están dadas por:

$$L(x,y,z)=0$$

$$M(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}R(t,y,z)\,dt-\int_{z_0}^{z}P(x_0,y,u)\,du$$

$$N(x,y,z)=-\int_{x_0}^{x}Q(t,y,z)\,dt$$

Ejercicio

Dado el campo vectorial F hallar un campo G $\ni$ $F=\nabla\times G$.

① $F(x,y,z)=(y-z,\,z-x,\,x-y)$

Sol.

Por un lado, cláramente $\nabla\cdot F=0$, por lo cual $\exists\, G$.

$\Rightarrow$ $P=y-z \rightarrow P(0,y,u)=y-u$

$Q=z-x \rightarrow Q(t,y,z)=z-t$ con $x_0=0=z_0$ por simplicidad

$R=x-y \rightarrow R(t,y,z)=t-y$

$\Rightarrow$ $L=0$

$$M=\int_0^x(t-y)\,dt-\int_0^z(y-u)\,du=\left(\frac{t^2}{2}-yt\right)\Big|_0^x-\left(yu-\frac{u^2}{2}\right)\Big|_0^z$$

$$=\frac{x^2}{2}-yx-yz+\frac{z^2}{2}$$

$$N=-\int_0^x(z-t)\,dt=-\left(zt-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^x=\frac{x^2}{2}-zx$$

$\therefore\ G(x,y,z) = \left(0,\ \frac{x^2}{2} - yx - yz + \frac{z^2}{2},\ \frac{x^2}{2} - xz\right)$

en donde

$$\nabla \times G = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & \frac{x^2}{2} - yx - yz + \frac{z^2}{2} & \frac{x^2}{2} - xz \end{vmatrix} = (y - z,\ z - x,\ x - y) = F$$

② $F(x,y,z) = (\cos(yz),\ \operatorname{sen}(xz),\ y + x)$

Claramente se observa que $\nabla \cdot F = 0 \Rightarrow \exists G$

$\Rightarrow P = \cos(yz) \rightarrow P(0,y,u) = \cos(yu)$

$Q = \operatorname{sen}(xz) \rightarrow Q(t,y,z) = \operatorname{sen}(tz)$ con $x_0 = z_0 = 0$

$R = y + x \rightarrow R(t,y,z) = y + t$

$\Rightarrow L = 0$

$$M = \int_0^x (y+t)\,dt - \int_0^z \cos(yu)\,du = \left(yt + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^x - \frac{\operatorname{sen}(yu)}{y}\Big|_0^z$$

$$= xy + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{y}\operatorname{sen}(yz)$$

$$N = -\int_0^x \operatorname{sen}(tz)\,dt = \frac{1}{z}\cos(tz)\Big|_0^x = \frac{1}{z}(\cos(xz) - 1)$$

$\therefore\ G(x,y,z) = \left(0,\ xy + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{y}\operatorname{sen}(yz),\ \frac{1}{z}(\cos(xz) - 1)\right)$

en donde

$$\nabla \times G = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & xy + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{y}\operatorname{sen}(yz) & \frac{1}{z}(\cos(xz) - 1) \end{vmatrix}$$

$$= (\cos(yz),\ \operatorname{sen}(xz),\ y + x) = F.$$

30/10/2014

③ Si dos campos vectoriales U y V son irrotacionales, demostrar que el campo vectorial $U \times V$ es solenoidal.

Nota: Un campo vectorial F es irrotacional si $\nabla \times F = \bar{0}$.

Sol.

Para demostrar lo anterior basta con demostrar la identidad

$$\nabla \cdot (F \times G) = G \cdot (\nabla \times F) - F \cdot (\nabla \times G)$$

con $F = (P, Q, R)$ y $G = (L, M, N)$ campos vectoriales diferenciables.

$$\nabla \cdot (F \times G) = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ P & Q & R \\ L & M & N \end{vmatrix}$$

$$= (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot (QN - RM, RL - PN, PM - QL)$$

$$= Q\partial_x N + N\partial_x Q - R\partial_x M - M\partial_x R + R\partial_y L + L\partial_y R - P\partial_y N - N\partial_y P + P\partial_z M + M\partial_z P - Q\partial_z L - L\partial_z Q.$$

$$= L(\partial_y R - \partial_z Q) + M(\partial_z P - \partial_x R) + N(\partial_x Q - \partial_y P) - P(\partial_y N - \partial_z M) - Q(\partial_z L - \partial_x N) - R(\partial_x M - \partial_y L)$$

$$= (L, M, N) \cdot (\partial_y R - \partial_z Q, \partial_z P - \partial_x R, \partial_x Q - \partial_y P) - (P, Q, R) \cdot (\partial_y N - \partial_z M, \partial_z L - \partial_x N, \partial_x M - \partial_y L)$$

$$= G \cdot (\nabla \times F) - F \cdot (\nabla \times G)$$ con lo que se comprueba la identidad.

Ahora bien, como U y V son irrotacionales $\Rightarrow \nabla \times U = \nabla \times V = \bar{0}$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (U \times V) = V \cdot (\cancel{\nabla \times U}^{\,\bar{0}}) - U \cdot (\cancel{\nabla \times V}^{\,\bar{0}}) = 0$$

$\downarrow$ por lo que se acaba de demostrar.

$\Rightarrow$ Como $\nabla \cdot (U \times V) = 0 \Rightarrow$ $\underline{U \times V \text{ es solenoidal}}$

④ Sea V un campo vectorial derivable con continuidad en cierto paralelepípedo rectangular S de $\mathbb{R}^3$. Consideremos lo siguiente:

I) $\nabla \times V = \bar{0}$ y $V = \nabla \times U$ para algún campo vectorial U derivable con continuidad en S.

II) $\exists$ un campo escalar $\varphi \ni \nabla\varphi$ es derivable con continuidad y $V = \nabla\varphi$, $\nabla^2\varphi = 0$ en todo S.

a) Demostrar que I) $\Rightarrow$ II)
b) Demostrar que II) $\Rightarrow$ I)

a) I) $\Rightarrow$ II)

$\Rightarrow \nabla \times V = \bar{0}$ y $V = \nabla \times U$ para algún U.

Recordando que siempre se cumple que $\nabla \times \nabla f = \bar{0}$ con f campo escalar $\Rightarrow$ podemos afirmar que como $\nabla \times V = \bar{0} \Rightarrow \exists \varphi$ escalar $\ni V = \nabla\varphi$, demostrando la 1era. parte de II).

Ahora, como $\exists \varphi \ni V = \nabla\varphi \Rightarrow \nabla \cdot V = \nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi$

$\Rightarrow \nabla \cdot V = \nabla^2\varphi$, pero como también $V = \nabla \times U$ para alguna U

$\Rightarrow \nabla \cdot V = \nabla \cdot (\nabla \times U) = \nabla^2\varphi$ y recordando que $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0 \quad \forall F$

$\Rightarrow \nabla^2\varphi = 0$, demostrando la 2nda. parte de II).

$\therefore$ un campo vectorial que es a la vez irrotacional y solenoidal en $S \Rightarrow$ es gradiente de una función armónica en S.

Nota: se dice que φ es armónica si $\nabla^2\varphi = 0$.

b) II) $\Rightarrow$ I)

Sabemos que $\exists \varphi \ni V = \nabla\varphi$ y $\nabla^2\varphi = 0$ en todo S.

$\Rightarrow$ como $V = \nabla\varphi \Rightarrow \nabla \times V = \nabla \times \nabla\varphi$ y como $\nabla \times \nabla f = 0 \quad \forall f$ escalar

$\Rightarrow \nabla \times V = \bar{0}$, demostrando la 1era. parte de I).

30/10/2014

Ahora, como $V = \nabla\varphi \Rightarrow \nabla\cdot V = \nabla\cdot\nabla\varphi = \nabla^2\varphi = 0$
$\Rightarrow \nabla\cdot V = 0 \Rightarrow V$ es solenoidal, y recordando el hecho de que si F es solenoidal $\Rightarrow \exists G \ni F = \nabla\times G \Rightarrow \exists U$ campo vectorial $\ni V = \nabla\times U$, demostrando la 2nda. parte de I).

Campo vectorial H visto como $H = F + G$ con F solenoidal y G irrotacional $\Rightarrow \exists U$ campo vectorial y φ campo escalar $\ni F = \nabla\times U$ y $G = \nabla\varphi$ en S.
$\Rightarrow$ se cumple que $\nabla^2\varphi = \nabla\cdot H$ y $\nabla(\nabla\cdot U) - \nabla^2 U = \nabla\times H$.

5 Dado $H(x,y,z) = (x^3y, y^3z, z^3x)$ campo vectorial, encontrar F y G campos vectoriales que satisfagan lo antes mencionado.

Sol.

Si $\exists\varphi \ni G = \nabla\varphi \Rightarrow$ se cumple $\nabla\cdot H = \nabla^2\varphi = \nabla\cdot\nabla\varphi \Rightarrow H = \nabla\varphi$

$$\Rightarrow \partial_x\varphi = x^3y \rightarrow \varphi = \int x^3y\,dx = \frac{x^4}{4}y + A(y,z)$$
$$\partial_y\varphi = y^3z \rightarrow \varphi = \int y^3z\,dy = \frac{y^4}{4}z + B(x,z)$$
$$\partial_z\varphi = z^3x \rightarrow \varphi = \int z^3x\,dz = \frac{z^4}{4}x + C(x,y)$$

$\Rightarrow$ hacemos $\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4}(x^4y + y^4z + z^4x)$

$$\Rightarrow G = \nabla\varphi = \left(x^3y + \frac{z^4}{4},\ y^3z + \frac{x^4}{4},\ z^3x + \frac{y^4}{4}\right)$$

$$\Rightarrow F = H - G = -\frac{1}{4}(z^4, x^4, y^4)$$

$\therefore$ $\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4}(x^4y + y^4z + z^4x)$

$F(x,y,z) = -\frac{1}{4}(z^4, x^4, y^4)$

$G(x,y,z) = \left(x^3y + \frac{z^4}{4},\ y^3z + \frac{x^4}{4},\ z^3x + \frac{y^4}{4}\right)$

Son los campos vectoriales $\ni H = F + G$ y que cumplen con lo mencionado.