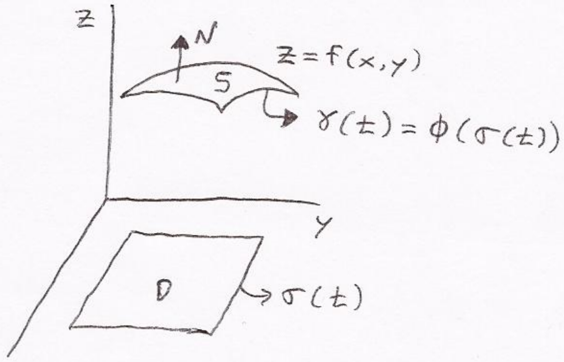
04/11/2014

Teorema de Stokes y de Gauss

Teo. de Stokes



donde ϕ es una parámetrización de S, con dominio en D. $\sigma(t)$ es la parametrización de la ∂D y $\gamma(t)=\phi(\sigma(t))$ es la parametrización de la ∂S.

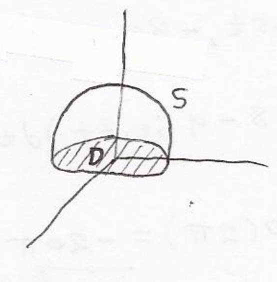
$$\Rightarrow \boxed{\int_\gamma F = \int_S (\nabla \times F)\cdot N\,dA}$$

en donde se relaciona la integral de línea de F a lo largo de la ∂S con la doble integral (integral de área) de la proyección del rotacional del campo F sobre el vector normal.

① Verificar el Teo. de Stokes para el hemisferio superior de $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $z\geq 0$ y el campo $F(x,y,z)=(x,y,z)$.

Sol.

Calculemos el lado izquierdo:



proponemos $\phi(x,y)=(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$

con $(x,y)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$

y $\sigma(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t)$ $t\in[0,2\pi]$ parametrización de la ∂D

$\Rightarrow \gamma(t)=\phi(\sigma(t))=(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ $t\in[0,2\pi]$

$\Rightarrow \gamma'(t)=(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$ y $F(\gamma(t))=(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$

$\Rightarrow F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)=-\operatorname{sen} t\cos t+\operatorname{sen} t\cos t=0$

por lo cual $\int_\gamma F = 0$

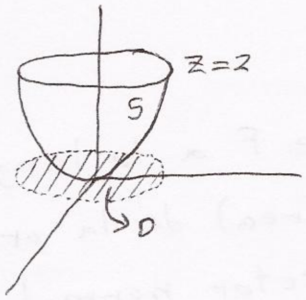
Para el lado derecho:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0,0,0) = \bar{0}$$

$$\therefore \int_S (\nabla \times F)\cdot N\, dA = 0$$

$$\therefore \int_\gamma F = 0 = \int_S (\nabla \times F)\cdot N\, dA$$

② verificar el T. de Stokes sobre la parte de $2z = x^2+y^2$ debajo de $z=2$ para $F(x,y,z) = (3y, -xz, -yz^2)$



Para el lado izquierdo:

hacemos $\phi(x,y) = \left(x, y, \dfrac{x^2+y^2}{2}\right)$

con $(x,y) \in D = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\}$

y $\sigma(t) = (2\cos t, 2\operatorname{Sen} t)$ $t \in [0, 2\pi]$ parametrización de la ∂D

$\Rightarrow \gamma(t) = \phi(\sigma(t)) = (2\cos t, 2\operatorname{Sen} t, 2)$ $t\in[0,2\pi]$

$\Rightarrow \gamma'(t) = (-2\operatorname{Sen} t, 2\cos t, 0)$ y $F(\gamma(t)) = (6\operatorname{Sen} t, -4\cos t, -8\operatorname{Sen} t)$

$$\Rightarrow \int_\gamma F = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi}(-12\operatorname{Sen}^2 t - 8\cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi}(-8 - 4\operatorname{Sen}^2 t)\,dt$$

$$= -4\int_0^{2\pi}(2 + \underbrace{\operatorname{Sen}^2 t}_{\frac{1-\cancel{\cos(2t)}}{2}})\,dt = -4\int_0^{2\pi}\left(2+\tfrac{1}{2}\right)dt = -4\int_0^{2\pi}\tfrac{5}{2}\,dt = -10(2\pi) = -20\pi$$

Nota: en todos lados donde una expresión aparesca "tachada" es por que la integral evaluada de dicha expresión es cero, i,e para la expresión de arriba $\frac{\cos(2t)}{2}$ integrada resulta en $\operatorname{Sen}(2t)$ (salvo constantes) y evaluada de 0 a 2π es cero.

04/11/2014

Para el lado derecho:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 3y & -xz & -yz^2 \end{vmatrix} = (x - z^2, 0, -z-3)$$

Como $\phi(x,y) = (x, y, \frac{x^2+y^2}{2})$

$\Rightarrow T_x = (1, 0, x)$
$T_y = (0, 1, y)$ $\Rightarrow N = (-x, -y, 1)$

$\Rightarrow (\nabla \times F) \cdot N = xz^2 - x^2 - z - 3 = x\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 - x^2 - \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) - 3 = \alpha(x,y)$

$\Rightarrow \int_S (\nabla \times F) \cdot N\, dA = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} \alpha(x,y)\, dx\, dy \underset{\substack{\downarrow \\ \text{cambio a} \\ \text{polares}}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^2 r\,\alpha(r\cos\theta, r\sin\theta)\, dr\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(\cancel{\frac{r^6}{4}\cos\theta} - r^3 \underbrace{\cos^2\theta}_{\cancel{\frac{1+\cos(2\theta)}{2}}} - \frac{r^3}{2} - 3r \right) dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (-r^3 - 3r)\, dr\, d\theta$

$= 2\pi\left(-\frac{r^4}{4} - \frac{3}{2}r^2\right)\Big|_0^2 = 2\pi(-4-6) = -20\pi$

$\therefore \int_\gamma F = -20\pi = \int_S (\nabla \times F) \cdot N\, dA$

③ Usar el Teo. de Stokes para evaluar $\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$ donde C es la intersección del cilindro $x^2+y^2=1$ y el plano $x+y+z=1$, con C orientación positiva, en el plano xy.

Sol.

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix} = (0, 0, 3x^2 + 3y^2)$$

Proponemos $\phi(x,y) = (x, y, 1-x-y)$ con $(x,y) \in D$ y
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} T_x=(1,0,-1) \\ T_y=(0,1,-1) \end{array} \Rightarrow N=(1,1,1)$$

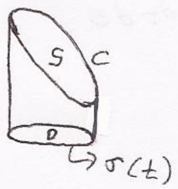
$$\Rightarrow \int_S (\nabla \times F)\cdot N\, dA = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3(x^2+y^2)\,dy\,dx \underset{\substack{\text{cambio} \\ \text{a polares}}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^3\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{3}{4}(2\pi) = \frac{3}{2}\pi$$

Ahora bien, por Teo. de Stokes sabemos que $\int_C F = \int_S (\nabla\times F)\cdot N\,dA$

$$\Rightarrow \int_S (\nabla\times F)\cdot N\,dA = \int_C F = \int_C -y^3dx + x^3dy - z^3dz = \frac{3\pi}{2}$$

Podemos comprobar lo anterior resolviendo directamente la integral de linea.



$$\sigma(t) = (\text{Cos}t, \text{Sen}t) \quad t\in[0,2\pi]$$

$$\Rightarrow \gamma(t) = C(t) = \phi(\sigma(t)) = (\text{Cos}t, \text{Sen}t, 1-\text{Cos}t-\text{Sen}t)$$

$$\Rightarrow \gamma'(t) = (-\text{Sen}t, \text{Cos}t, \text{Sen}t-\text{Cos}t)$$

$$F(\gamma(t)) = (-\text{Sen}^3t, \text{Cos}^3t, -(1-\text{Cos}t-\text{Sen}t)^3)$$

$$\Rightarrow \int_C F = \int_0^{2\pi}(\text{Sen}^4t + \text{Cos}^4t - (\text{Sen}t-\text{Cos}t)(1-\text{Cos}t-\text{Sen}t)^3)\,dt$$

$$u = 1-\text{Cos}t-\text{Sen}t$$
$$du = \text{Sen}t - \text{Cos}t$$

$$= \int_0^{2\pi}(\text{Sen}^4t+\text{Cos}^4t)\,dt - \int u^3du = \int_0^{2\pi}(\text{Sen}^4t+\text{Cos}^4t)\,dt - \cancelto{0}{\frac{1}{4}(1-\text{Cos}t-\text{Sen}t)^4\Big|_0^{2\pi}}$$

$$= \int_0^{2\pi}(\text{Sen}^4t+\text{Cos}^4t)\,dt = \text{I}$$

$$\text{Sen}^2t = \frac{1-\text{Cos}(2t)}{2} \Rightarrow \text{Sen}^4t = \frac{1}{4}(1-2\text{Cos}(2t)+\text{Cos}^2(2t))$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-2\text{Cos}(2t)+\frac{1+\text{Cos}(4t)}{2}\right)$$

04/11/2014

y $\quad \cos^2 t = \dfrac{1+\cos(2t)}{2} \Rightarrow \cos^4 t = \frac{1}{4}\left(1+2\cos(2t)+\cos^2(2t)\right)$

$$= \frac{1}{4}\left(1+2\cos(2t)+\frac{1+\cos(4t)}{2}\right)$$

$$\Rightarrow ① = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\left(1-2\cancel{\cos(2t)}+\frac{1+\cancel{\cos(4t)}}{2}+1+2\cancel{\cos(2t)}+\frac{1+\cancel{\cos(4t)}}{\cancel{2}}\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(2+1)\,dt = \frac{3}{4}(2\pi) = \frac{3\pi}{2}$$

comprobando dicha igualdad.

<u>Teorema de Gauss</u>

$$\boxed{\int_\Omega (\nabla\cdot F)\,dV = \int_{\partial\Omega = S} F\cdot N\,dA}$$

donde se establece la relación entre la integral del área de una superficie que encierra un volumen, con la integral de volumen de la divergencia del campo.

④ Verificar el Teo. de Gauss para el cilindro Ω $x^2+y^2=1$, entre $z=1$ y $z=-1$, $F=(xy^2, x^2y, y)$

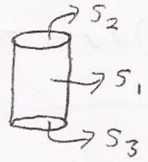
<u>Sol.</u>

Calculemos primero el lado izquierdo $\int_\Omega (\nabla\cdot F)\,dV$

$\Rightarrow \nabla\cdot F = y^2+x^2$

$$\Rightarrow \int_\Omega (\nabla\cdot F)\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (y^2+x^2)\,dy\,dx\,dz \underset{\substack{\downarrow \\ \text{cambio} \\ \text{a cilíndricas}}}{=} \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\,dr\,d\theta\,dz = (2)(2\pi)\left(\frac{1}{4}\right) = \pi$$

Para el lado derecho tenemos 3 superficies



Sea $\phi_1(\theta, z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$ $\quad \theta\in[0,2\pi]$, $z\in[-1,1]$

Una parametrización para S_1 y

$\phi_{2,3}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \pm 1)$ $\quad r\in[0,1]$, $\theta\in[0,2\pi]$

las parametrizaciones de las tapas S_2 y S_3, respectivamente.

$$\Rightarrow T_{1\theta} = (-\operatorname{Sen}\theta, \operatorname{Cos}\theta, 0)$$
$$T_{1z} = (\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1) \Rightarrow N_1 = (\operatorname{Cos}\theta, \operatorname{Sen}\theta, 0)$$

y $F(\phi_1) = (\operatorname{Cos}\theta \operatorname{Sen}^2\theta, \operatorname{Cos}^2\theta \operatorname{Sen}\theta, \operatorname{Sen}\theta)$

$$\Rightarrow \int_{S_1} F\cdot N dA = \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} 2\operatorname{Cos}^2\theta \operatorname{Sen}^2\theta \, d\theta\, dz = 4\int_0^{2\pi} \operatorname{Cos}^2\theta(1-\operatorname{Cos}^2\theta)d\theta$$

$$= 4\int_0^{2\pi}(\operatorname{Cos}^2\theta - \operatorname{Cos}^4\theta)d\theta$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{1+\cancel{\operatorname{Cos}(2\theta)}}{2} \qquad \frac{1}{4}\left(1+\cancel{2\operatorname{Cos}(2\theta)}+\frac{1+\cancel{\operatorname{Cos}(4\theta)}}{2}\right)$$

$$= 4\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)d\theta = \frac{4}{8}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2}(2\pi) = \pi$$

Ahora, para las tapas:

$$T_{2,3r} = (\operatorname{Cos}\theta, \operatorname{Sen}\theta, 0)$$
$$T_{2,3\theta} = (-r\operatorname{Sen}\theta, r\operatorname{Cos}\theta, 0) \Rightarrow N_{2,3} = (0, 0, r)$$

y $F(\phi_{2,3}) = (r^3\operatorname{Cos}\theta \operatorname{Sen}^2\theta, r^3\operatorname{Cos}^2\theta \operatorname{Sen}\theta, r\operatorname{Sen}\theta)$

$$\Rightarrow \int_{S_2,S_3} F\cdot N dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \operatorname{Sen}\theta\, dr\, d\theta = -\frac{1}{3}\operatorname{Cos}\theta\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\therefore \int_S F\cdot N dA = \underset{S_1}{\pi} + \underset{S_2}{0} + \underset{S_3}{0} = \pi$$

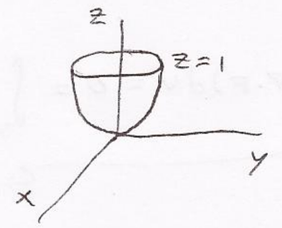
$$\therefore \int_\Omega (\nabla\cdot F) dv = \pi = \int_S F\cdot N dA$$

04/11/2014

⑤ Verificar el teo. de Gauss para $F=(y, z, xz)$ y el paraboloide $x^2+y^2 \leq z \leq 1$.

Sol.

$\nabla \cdot F = x$



$$\Rightarrow \int_\Omega (\nabla\cdot F)\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{1} x\,dz\,dy\,dx$$

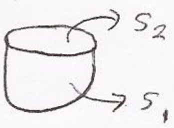
$$= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x-x^3-xy^2)\,dy\,dx \underset{\substack{\text{cambio}\\ \text{a polares}}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\cancel{\cos\theta} - r^4\cos^3\theta - r^4\cancel{\cos\theta\,\text{sen}^2\theta})\,dr\,d\theta$$

$\cos\theta\cos^2\theta = \cancel{\cos\theta} - \cancel{\cos\theta\,\text{sen}^2\theta}$

$$= 0$$

$$\therefore \int_\Omega (\nabla\cdot F)\,dV = 0$$

Por otro lado, tenemos 2 superficies:



$\phi_1(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, r^2)$ $\quad r\in[0,1]$, $\theta\in[0,2\pi]$ para S_1 y

$\phi_2(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, 1)$ $\quad r\in[0,1]$, $\theta\in[0,2\pi]$ para S_2.

$\Rightarrow T_{1r} = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 2r)$

$T_{1\theta} = (-r\,\text{sen}\,\theta, r\cos\theta, 0)$ $\quad \Rightarrow N_1 = (-2r^2\cos\theta, -2r^2\,\text{sen}\,\theta, r)$

$F(\phi_1) = (r\,\text{sen}\,\theta, r^2, r^3\cos\theta)$

$$\Rightarrow \int_{S_1} F\cdot N\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-2r^3\,\text{sen}\,\cancel{\theta}\cos\theta - 2r^4\,\text{se}\cancel{n}\,\theta + r^4\,\text{co}\cancel{s}\,\theta)\,dr\,d\theta = 0$$

Y $T_{2r} = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 0)$

$T_{2\theta} = (-r\,\text{sen}\,\theta, r\cos\theta, 0)$ $\quad \Rightarrow N_2 = (0, 0, r)$

$F(\phi_2) = (r\,\text{sen}\,\theta, 1, r\cos\theta)$

$$\Rightarrow \int_{S_2} F\cdot N\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,\cancel{\cos}\,\theta\,dr\,r\,d\theta = 0$$

$$\therefore \int_S F\cdot N\,dA = 0+0=0$$

$$\therefore \int_\Omega (\nabla\cdot F)\,dV = 0 = \int_S F\cdot N\,dA$$