11/11/2014

Laplaciano en distintas coordenadas y aplicaciones del Teorema de Stokes.

Sea $z=f(x,y)$ una función escalar y de clase C^2.
Recordando que $\nabla^2 z=(\nabla\cdot\nabla)z=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ $\Rightarrow$ veremos cuál es la representación del laplaciano en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

Por simplicidad haremos uso de la siguiente notación:

$\frac{\partial}{\partial i}\equiv\partial_i$ con $i=x,y,z$, $\frac{\partial^2}{\partial i\partial j}=\partial^2_{ij}$ con $i,j=x,y,z$ $i\neq j$,

$\cos\theta\equiv c\theta$ y $\operatorname{sen}\theta\equiv s\theta$

- Laplaciano en coordenadas polares

Sea $z=f(x,y)=f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$

$$\Rightarrow \partial_r z=\partial_x f\,\partial_r x+\partial_y f\,\partial_r y=c\theta\,\partial_x f+s\theta\,\partial_y f \quad \ldots ①$$

$$\partial_\theta z=\partial_x f\,\partial_\theta x+\partial_y f\,\partial_\theta y=-r s\theta\,\partial_x f+r c\theta\,\partial_y f \ldots ②$$

de ① $\quad \partial_x f=\frac{1}{c\theta}\partial_r z-\frac{s\theta}{c\theta}\partial_y f$ y sustituyendo en ②

$$\partial_\theta z=-rs\theta\left(\frac{1}{c\theta}\partial_r z-\frac{s\theta}{c\theta}\partial_y f\right)+rc\theta\,\partial_y f$$

$$=r\left(\frac{s^2\theta}{c\theta}+c\theta\right)\partial_y f-r\frac{s\theta}{c\theta}\partial_r z=\frac{r}{c\theta}\partial_y f-r\frac{s\theta}{c\theta}\partial_r z$$

$$\Rightarrow \partial_y f=\frac{c\theta}{r}\partial_\theta z+s\theta\,\partial_r z \ldots ③$$

y $\quad \partial_x f=\frac{1}{c\theta}\partial_r z-\frac{s\theta}{c\theta}\partial_y f=\frac{1}{c\theta}\partial_r z-\frac{s\theta}{c\theta}\left(\frac{c\theta}{r}\partial_\theta z+s\theta\,\partial_r z\right)$

$$=\left(\frac{1}{c\theta}-\frac{s^2\theta}{c\theta}\right)\partial_r z-\frac{s\theta}{r}\partial_\theta z=c\theta\,\partial_r z-\frac{s\theta}{r}\partial_\theta z \ldots ④$$

$\therefore$ de ③ y ④ obtenemos que el gradiente en coordenadas polares es:

$$\nabla = \left(c\theta\partial_r - \frac{s\theta}{r}\partial_\theta ,\ s\theta\partial_r + \frac{c\theta}{r}\partial_\theta\right)$$

y ahora

$$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \left(c\theta\partial_r - \frac{s\theta}{r}\partial_\theta ,\ s\theta\partial_r + \frac{c\theta}{r}\partial_\theta\right)\cdot\left(c\theta\partial_r - \frac{s\theta}{r}\partial_\theta ,\ s\theta\partial_r + \frac{c\theta}{r}\partial_\theta\right)$$

$$= \left(c\theta\partial_r - \frac{s\theta}{r}\partial_\theta\right)\left(c\theta\partial_r - \frac{s\theta}{r}\partial_\theta\right) + \left(s\theta\partial_r + \frac{c\theta}{r}\partial_\theta\right)\left(s\theta\partial_r + \frac{c\theta}{r}\partial_\theta\right)$$

$$= c^2\theta\,\partial_r(\partial_r) - cs\theta\,\partial_\theta\,\partial_r\left(\tfrac{1}{r}\right) - \frac{s\theta}{r}\partial_r\,\partial_\theta(c\theta) + \frac{s\theta}{r^2}\partial_\theta(s\theta\partial_\theta)$$
$$+ s^2\theta\,\partial_r(\partial_r) + s\theta c\theta\,\partial_\theta\,\partial_r\left(\tfrac{1}{r}\right) + \frac{c\theta}{r}\partial_r\,\partial_\theta(s\theta) + \frac{c\theta}{r^2}\partial_\theta(c\theta\partial_\theta)$$

$$= c^2\theta\,\partial_r^2 + \cancel{\frac{c\theta s\theta}{r^2}\partial_\theta} + \frac{s^2\theta}{r}\partial_r + \frac{s\theta}{r^2}\left(\cancel{c\theta\partial_\theta} + s\theta\partial_\theta^2\right) + s^2\theta\,\partial_r^2$$
$$- \cancel{\frac{s\theta c\theta}{r^2}\partial_\theta} + \frac{c^2\theta}{r}\partial_r + \frac{c\theta}{r^2}\left(\cancel{-s\theta\partial_\theta} + c\theta\partial_\theta^2\right)$$

$$= (c^2\theta + s^2\theta)\,\partial_r^2 + (c^2\theta+s^2\theta)\frac{1}{r}\partial_r + (s^2\theta + c^2\theta)\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2$$

∴ el laplaciano en coordenadas polares es

$$\nabla^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2$$

-Laplaciano en coordenadas cilíndricas

Sea $w = f(x,y,z) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)$

$$\Rightarrow \partial_r w = \partial_x f\,\partial_r x + \partial_y f\,\partial_r y + \partial_z f\,\cancelto{0}{\partial_r z} = c\theta\partial_x f + s\theta\partial_y f \quad \ldots ⑤$$

$$\partial_\theta w = \partial_x f\,\partial_\theta x + \partial_y f\,\partial_\theta y + \partial_z f\,\cancelto{0}{\partial_\theta z} = -rs\theta\partial_x f + rc\theta\partial_y f \quad \ldots ⑥$$

$$\partial_z w = \partial_x f\,\cancelto{0}{\partial_z x} + \partial_y f\,\cancelto{0}{\partial_z y} + \partial_z f\,\cancelto{1}{\partial_z z} = \partial_z f \quad \ldots\ldots\ldots ⑦$$

en donde uno puede observar que ⑤ y ⑥ son las mismas ecuaciones que ① y ②, ∴ podemos obtener directamente el gradiente en coordenadas cilíndricas dado por

$$\nabla = \left(c\theta\partial_r - \frac{s\theta}{r}\partial_\theta ,\ s\theta\partial_r + \frac{c\theta}{r}\partial_\theta ,\ \partial_z\right)$$

$$y \therefore \nabla^2 = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 + \partial_z^2$$

que resulta al sumarle al laplaciano en coordenadas polares, la segunda derivada parcial respecto a z.

- Laplaciano en coordenadas esféricas

Sea $w = f(x,y,z) = f(r\cos\phi\,\text{sen}\,\theta,\ r\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta,\ r\cos\theta)$

$$\Rightarrow \partial_r w = \partial_x f\,\partial_r x + \partial_y f\,\partial_r y + \partial_z f\,\partial_r z$$
$$= c\phi s\theta\,\partial_x f + s\phi s\theta\,\partial_y f + c\theta\,\partial_z f$$

$$\Rightarrow \partial_r^2 w = c\phi s\theta(\partial_x^2 f\,\partial_r x + \partial_{yx}^2 f\,\partial_r y + \partial_{zx}^2 f\,\partial_r z)$$
$$+ s\phi s\theta(\partial_{xy}^2 f\,\partial_r x + \partial_y^2 f\,\partial_r y + \partial_{zy}^2 f\,\partial_r z)$$
$$+ c\theta(\partial_{xz}^2 f\,\partial_r x + \partial_{yz}^2 f\,\partial_r y + \partial_z^2 f\,\partial_r z)$$
$$= c^2\phi s^2\theta\,\partial_x^2 f + 2s\phi c\phi s^2\theta\,\partial_{xy}^2 f + 2c\phi\cos s\theta\,\partial_{xz}^2 f + s^2\phi s^2\theta\,\partial_y^2 f$$
$$+ 2s\phi s\theta c\theta\,\partial_{yz}^2 f + c^2\theta\,\partial_z^2 f \quad \ldots \quad (8)$$

Ahora $\partial_\theta w = \partial_x f\,\partial_\theta x + \partial_y f\,\partial_\theta y + \partial_z f\,\partial_\theta z$

$$= rc\phi c\theta\,\partial_x f + rs\phi c\theta\,\partial_y f - rs\theta\,\partial_z f$$

$$\Rightarrow \partial_\theta^2 w = rc\phi(-s\theta\,\partial_x f + c\theta(\partial_x^2 f\,\partial_\theta x + \partial_{yx}^2 f\,\partial_\theta y + \partial_{zx}^2 f\,\partial_\theta z))$$
$$+ rs\phi(-s\theta\,\partial_y f + c\theta(\partial_{xy}^2 f\,\partial_\theta x + \partial_y^2 f\,\partial_\theta y + \partial_{zy}^2 f\,\partial_\theta z))$$
$$- r(c\theta\,\partial_z f + s\theta(\partial_{xz}^2 f\,\partial_\theta x + \partial_{yz}^2 f\,\partial_\theta y + \partial_z^2 f\,\partial_\theta z))$$
$$= -rc\phi s\theta\,\partial_x f + r^2c^2\phi c^2\theta\,\partial_x^2 f + 2r^2 s\phi c\phi c^2\theta\,\partial_{xy}^2 f$$
$$- 2r^2 c\phi\cos s\theta\,\partial_{xz}^2 f - rs\phi s\theta\,\partial_y f + r^2 s^2\phi c^2\theta\,\partial_y^2 f$$
$$- 2r^2 s\theta\cos s\phi\,\partial_{yz}^2 f - rc\theta\,\partial_z f + r^2 s^2\theta\,\partial_z^2 f$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 w = c^2\phi\, c^2\theta\, \partial_x^2 f + s^2\phi\, c^2\theta\, \partial_y^2 f + s^2\theta\, \partial_z^2 f + 2s\phi\, c\phi\, c^2\theta\, \partial_{xy}^2 f$$
$$-2c\phi\, c\theta\, s\theta\, \partial_{xz}^2 f - 2s\theta\, c\theta\, s\phi\, \partial_{yz}^2 f - \frac{1}{r}\left(c\phi\, s\theta\, \partial_x f + s\phi\, s\theta\, \partial_y f + c\theta\, \partial_z f\right) \ldots (9)$$

y

$$\partial_\phi w = \partial_x f\, \partial_\phi x + \partial_y f\, \partial_\phi y + \partial_z f\, \cancel{\partial_\phi z}^{\,0}$$
$$= -r s\phi\, s\theta\, \partial_x f + r c\phi\, s\theta\, \partial_y f$$

$$\Rightarrow \partial_\phi^2 w = -r s\theta\left(c\phi\, \partial_x f + s\phi\left(\partial_x^2 f\, \partial_\phi x + \partial_{yx}^2 f\, \partial_\phi y + \partial_{zx}^2 f\, \cancel{\partial_\phi z}^{\,0}\right)\right)$$
$$+ r s\theta\left(-s\phi\, \partial_y f + c\phi\left(\partial_{xy}^2 f\, \partial_\phi x + \partial_y^2 f\, \partial_\phi y + \partial_{zy}^2 f\, \cancel{\partial_\phi z}^{\,0}\right)\right)$$
$$= -r s\theta\, c\phi\, \partial_x f + r^2 s^2\phi\, s^2\theta\, \partial_x^2 f - 2r^2 c\phi\, s\phi\, s^2\theta\, \partial_{xy}^2 f - r s\theta\, s\phi\, \partial_y f$$
$$+ r^2 c^2\phi\, s^2\theta\, \partial_y^2 f$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2 s^2\theta}\partial_\phi^2 w = s^2\phi\, \partial_x^2 f + c^2\phi\, \partial_y^2 f - 2c\phi\, s\phi\, \partial_{xy}^2 f - \frac{1}{r s\theta}\left(c\phi\, \partial_x f + s\phi\, \partial_y f\right) \ldots (10)$$

Sumando (8), (9) y (10) tenemos

$$\partial_r^2 w + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 w + \frac{1}{r^2 s^2\theta}\partial_\phi^2 w = c^2\phi\, s^2\theta\, \partial_x^2 f + s^2\phi\, s^2\theta\, \partial_y^2 f + c^2\theta\, \partial_z^2 f$$
$$+ 2s\phi\, c\phi\, s^2\theta\, \partial_{xy}^2 f + 2c\phi\, c\theta\, s\theta\, \partial_{xz}^2 f + 2s\phi\, s\theta\, c\theta\, \partial_{yz}^2 f + c^2\phi\, c^2\theta\, \partial_x^2 f$$
$$+ s^2\phi\, c^2\theta\, \partial_y^2 f + s^2\theta\, \partial_z^2 f + 2s\phi\, c\phi\, c^2\theta\, \partial_{xy}^2 f - 2c\phi\, c\theta\, s\theta\, \partial_{xz}^2 f - 2s\theta\, c\theta\, s\phi\, \partial_{yz}^2 f$$
$$- \frac{1}{r}\left(c\phi\, s\theta\, \partial_x f + s\phi\, s\theta\, \partial_y f + c\theta\, \partial_z f\right) + s^2\phi\, \partial_x^2 f + c^2\phi\, \partial_y^2 f - 2c\phi\, s\phi\, \partial_{xy}^2 f$$
$$- \frac{1}{r s\theta}\left(c\phi\, \partial_x f + s\phi\, \partial_y f\right)$$

$$= \left(c^2\phi\, s^2\theta + c^2\phi\, c^2\theta + s^2\phi\right)\partial_x^2 f + \left(s^2\phi\, s^2\theta + s^2\phi\, c^2\theta + c^2\phi\right)\partial_y^2 f$$
$$+ \left(c^2\theta + s^2\theta\right)\partial_z^2 f - \frac{1}{r}\partial_r w - \frac{1}{r s\theta}\left(c\phi\, \partial_x f + s\phi\, \partial_y f\right)$$
$$= \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f - \frac{1}{r}\partial_r w - \frac{1}{r s\theta}\left(c\phi\, \partial_x f + s\phi\, \partial_y f\right)$$

$$\therefore\ \partial_r^2 w + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 w + \frac{1}{r^2 s^2\theta}\partial_\phi^2 w = \nabla^2 f - \frac{1}{r}\partial_r w - \frac{1}{r s\theta}\left(c\phi\, \partial_x f + s\phi\, \partial_y f\right) \ldots (11)$$

11/11/2014

Para llegar al resultado final falta ver quién es $\frac{1}{rs\theta}(c\phi\partial_x f + s\phi\partial_y f)$?

$$\frac{1}{rs\theta}(c\phi\partial_x f+s\phi\partial_y f) = \frac{1}{rs\theta}\left(c\phi(s^2\theta+c^2\theta)\partial_x f + s\phi(s^2\theta+c^2\theta)\partial_y f\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left[\left(c\phi s\theta + \frac{c\phi c^2\theta}{s\theta}\right)\partial_x f + \left(s\phi s\theta + \frac{s\phi c^2\theta}{s\theta}\right)\partial_y f + \left(\frac{c\theta s\theta - c\theta s\theta}{s\theta}\right)\partial_z f\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left(c\phi s\theta\,\partial_x f + s\phi s\theta\,\partial_y f + c\theta\,\partial_z f\right)$$

$$+ \frac{c\theta}{rs\theta}\left(c\phi c\theta\,\partial_x f + s\phi c\theta\,\partial_y f - s\theta\,\partial_z f\right)$$

$$= \frac{1}{r}\partial_r w + \frac{c\theta}{r^2 s\theta}\left(r c\phi c\theta\,\partial_x f + r s\phi c\theta\,\partial_y f - r s\theta\,\partial_z f\right)$$

$$= \frac{1}{r}\partial_r w + \frac{c\theta}{r^2 s\theta}\partial_\theta w$$

$\therefore$ (11) resulta ser

$$\partial_r^2 w + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 w + \frac{1}{r^2 s^2\theta}\partial_\phi^2 w = \nabla^2 f - \frac{2}{r}\partial_r w - \frac{c\theta}{r^2 s\theta}\partial_\theta w$$

$$\therefore \nabla^2 f = \partial_r^2 w + \frac{2}{r}\partial_r w + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 w + \frac{c\theta}{r^2 s\theta}\partial_\theta w + \frac{1}{r^2 s^2\theta}\partial_\phi^2 w$$

$$= \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r w) + \frac{1}{r^2 s\theta}\partial_\theta(s\theta\,\partial_\theta w) + \frac{1}{r^2 s^2\theta}\partial_\phi^2 w$$

$\therefore$ el laplaciano en coordenadas esféricas es:

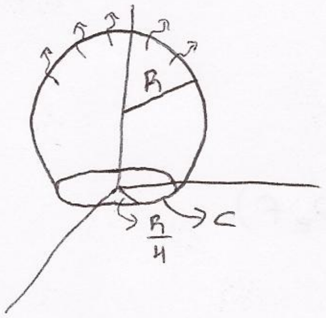
$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) + \frac{1}{r^2 s\theta}\partial_\theta(s\theta\,\partial_\theta) + \frac{1}{r^2 s^2\theta}\partial_\phi^2$$

- Aplicaciones del Teorema de Stokes

Un globo aerostático tiene la forma esférica truncada mostrada en la figura. Los gases calientes escapan por la cubierta porosa con campo vectorial de velocidad

$V = \nabla \times \phi \quad , \quad \phi = (-y, x).$

Si $R = 5$, calcular la taza de flujo del volumen de los gases que pasan a través de la superficie.



Sol.

Como el objetivo es el cálculo del flujo de gas a través del globo, entonces podemos hacer la analogía de dicho flujo ξ con $V = \nabla \times \phi$ de la siguiente manera:

$$\xi = \int_S (\nabla \times \phi) \cdot N \, dA$$

pero el problema es que para evaluar esa integral no conocemos la parametrización de S, lo que sí sabemos es quién es ∂S, por lo cual recurrimos al Teo. de Stokes para poder saber quién es ξ.

$$\Rightarrow \xi = \int_S (\nabla \times \phi) \cdot N \, dA = \int_{C = \partial S} \phi$$

Sea $C(t) \equiv \gamma(t) = \left(\frac{R}{4}\cos t, \frac{R}{4}\operatorname{sen} t\right) \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow \phi(\gamma(t)) = \left(-\frac{R}{4}\operatorname{sen} t, \frac{R}{4}\cos t\right) \quad y \quad \gamma'(t) = \left(-\frac{R}{4}\operatorname{sen} t; \frac{R}{4}\cos t\right)$$

11/11/2014

$$\Rightarrow \xi = \int_C \phi = \int_0^{2\pi} \phi(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{16}\,dt = \frac{R^2\pi}{8} = \frac{25\pi}{8}$$

$\therefore$ $\frac{25\pi}{8}$ es la taza de flujo de los gases que pasan a través del globo.

- Ley de Faraday

La Ley de Faraday del electromagnetismo en su forma diferencial está dada por:

$$\nabla\times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \cdots \text{①}$$

donde se establece la relación matemática y física entre el campo eléctrico $E(t,x,y,z)$ y el campo magnético $B(t,x,y,z)$, dado por el rotacional de E (circulación de E) y la taza de cambio del campo magnético en el tiempo t.

Ahora, si integramos ambos lados de ① sobre una superficie S que cumpla el Teo. de Stokes tenemos:

$$\int_S (\nabla\times E)\cdot N\,dA = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t}\cdot N\,dA = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S B\cdot N\,dA$$

si B es de clase C^1

y aplicando Teo. de Stokes del lado izquierdo

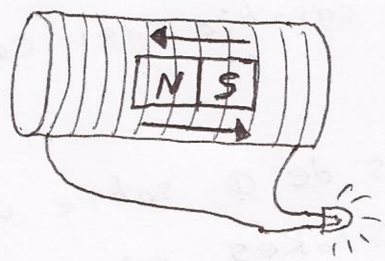
$$\Rightarrow -\int_{\partial S} E = -\int_S (\nabla\times E)\cdot N\,dA = \frac{\partial}{\partial t}\int_S B\cdot N\,dA$$

$$\Rightarrow -\int_{\partial S} E = \frac{\partial}{\partial t}\int_S B\cdot N\,dA \quad \cdots \text{②}$$

donde el lado izquierdo de ② en física es conocido como la diferencia de potencial (o tensión) cuya unidad son los Volts, y el lado derecho es la variación (en el tiempo) del flujo de campo magnético que atravieza una determinada área.

Este pequeño análisis tiene una aplicación que resulta ser muy curiosa y sorprendente.

Consideremos un solenoide (bobina cilíndrica), la cual esta enrollado por un alambre conductor (por ejemplo, cobre) y las dos puntas del alambre las conectamos a un foco LED. Por otro lado, tomamos un imán y de manera aleatoria introducimos y sacamos el imán del solenoide.



Qué ocurre?

"El foco LED se prende"

Recordando que el lado izquierdo de ② es la diferencia de potencial y que al conectar el foco LED se cierra dicho circuito ⇒ por el alambre fluirá una corriente eléctrica que encenderá el LED, siempre y cuando el flujo de campo magnético varíe en el tiempo, si el imán está en reposo ⇒ el lado derecho de ② es cero

11/11/2014

y por lo tanto la diferencia de potencial será cero, y el LED no se encenderá, pues no habrá corriente eléctrica en el circuito que lo active.

∴ Para que el LED se encienda, es necesario "bombear" campo magnético a través del solenoide, en donde esto está dado por

$$-\int_{\partial S} E = \frac{\partial}{\partial t}\int_S B \cdot N\, dA$$

que resultó de la aplicación del Teo. de Stokes a la Ley de Faraday.

¿Curioso no?