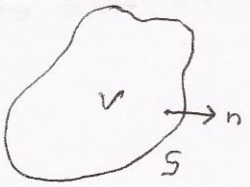
13/11/2014

Sean f y g campos escalares de clase C^2, y sea S una superficie cerrada que encierra un volumen V, en el cual se cumple el Teorema de Gauss $\int_S F \cdot N\, dA = \int_V (\nabla \cdot F)\, dV$ para algún campo vectorial F.



Demostrar lo siguiente:

a) $\displaystyle\int_S \frac{\partial f}{\partial n}\, dA = \int_V \nabla^2 f\, dV$

b) $\displaystyle\int_S \frac{\partial f}{\partial n}\, dA = 0$ siempre que f sea armónica en V

c) $\displaystyle\int_S f \frac{\partial g}{\partial n}\, dA = \int_V (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV$

d) $\displaystyle\int_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) dA = \int_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dV$

e) $\displaystyle\int_S f \frac{\partial g}{\partial n}\, dA = \int_S g\frac{\partial f}{\partial n}\, dA$ si f y g son armónicas en V

f) $\displaystyle\int_S f \frac{\partial f}{\partial n}\, dA = \int_V |\nabla f|^2\, dV$ si f es armónica en V

g) $\displaystyle\nabla^2 f(\bar{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{|V(t)|} \int_{S(t)} \frac{\partial f}{\partial n}\, dA$ donde $V(t)$ es una esfera de radio t y centro en $\bar{a}$, $S(t)$ es la superficie de $V(t)$ y $|V(t)|$ es el volumen de $V(t)$.

Dem.

Hay que recordar que $\frac{\partial f}{\partial n}$ es la derivada parcial de f en la dirección de n, i,e, es una derivada direccional, dada por

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot n$$

a) $\int_S \frac{\partial f}{\partial n} dA = \int_S \nabla f \cdot n \, dA \underset{\substack{\downarrow \\ \text{por Gauss}}}{=} \int_V \nabla\cdot(\nabla f)\, dV = \int_V \nabla^2 f \, dV$

b) $\int_S \frac{\partial f}{\partial n} dA \underset{\substack{\downarrow \\ \text{por a)}}}{=} \int_V \nabla^2 f \, dV$ y esto es igual a cero $\Leftrightarrow$ f es armónica en V, i,e, $\nabla^2 f = 0$

$\therefore \int_S \frac{\partial f}{\partial n} dA = 0$ sólo si f es armónica en V.

c) $\int_S f \frac{\partial g}{\partial n} dA = \int_S f \nabla g \cdot n \, dA \underset{\substack{\downarrow \\ \text{por Gauss}}}{=} \int_V \nabla\cdot(f\nabla g)\, dV \cdots ①$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(f\nabla g) &= (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\cdot(f\partial_x g, f\partial_y g, f\partial_z g)\\ &= f\partial_x^2 g + \partial_x f \partial_x g + f\partial_y^2 g + \partial_y f \partial_y g + f\partial_z^2 g + \partial_z f \partial_z g\\ &= f(\partial_x^2 g + \partial_y^2 g + \partial_z^2 g) + (\partial_x f \partial_x g + \partial_y f \partial_y g + \partial_z f \partial_z g)\\ &= f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g\end{aligned}$$

$\therefore ① = \int_V (f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g)\, dV$

$\therefore \int_S f \frac{\partial g}{\partial n} dA = \int_V (f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g)\, dV$

d) $\int_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) dA = \int_S (f\nabla g - g\nabla f)\cdot n\, dA \underset{\substack{\downarrow \\ \text{por Gauss}}}{=} \int_V \nabla\cdot(f\nabla g - g\nabla f)\, dV$

$= \int_V (\nabla\cdot(f\nabla g) - \nabla\cdot(g\nabla f))\, dV \underset{\substack{\downarrow \\ \text{por c)}}}{=} \int_V (f\nabla^2 g + \cancel{\nabla f\cdot\nabla g} - (g\nabla^2 f + \cancel{\nabla g\cdot\nabla f}))\, dV$

$= \int_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dV$

13/11/2014

e) $\int_S f \frac{\partial g}{\partial n} dA = \int_S f \nabla g \cdot n \, dA \underset{\text{por Gauss}}{=} \int_V \nabla \cdot (f \nabla g) dV \underset{\text{por c)}}{=} \int_V (f \cancel{\nabla^2 g}^{\,0} + \nabla f \cdot \nabla g) dV = \int_V \nabla f \cdot \nabla g \, dV$

g es armónico

$= \int_V \nabla g \cdot \nabla f \, dV = \int_V (0 + \nabla g \cdot \nabla f) dV = \int_V (g \nabla^2 f + \nabla g \cdot \nabla f) dV$

f es armónico

$\underset{\text{por c)}}{=} \int_V \nabla \cdot (g \nabla f) dV \underset{\text{por Gauss}}{=} \int_S g \nabla f \cdot n \, dA = \underline{\int_S g \frac{\partial f}{\partial n} dA}$

f) $\int_S f \frac{\partial f}{\partial n} dA = \int_S f \nabla f \cdot n \, dA \underset{\text{por Gauss}}{=} \int_V \nabla \cdot (f \nabla f) dV \underset{\text{por c)}}{=} \int (f \cancel{\nabla^2 f}^{\,0} + \nabla f \cdot \nabla f) dV$

f es armónico

$\underline{= \int_V |\nabla f|^2 dV}$ pues $\nabla f \cdot \nabla f$ es el módulo al cuadrado de ∇f

g) P.D. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ni \left| \nabla^2 f(\bar{a}) - \frac{1}{|V(t)|} \int_S \frac{\partial f}{\partial n} dA \right| < \varepsilon$ siempre que $|t - 0| = |t| < \delta$ $(0 < t < \delta)$.

<u>Dem.</u>

Como estamos considerando funciones continuas que cumplen con el Teorema de Gauss en V $\Rightarrow \varphi(\bar{x}) \equiv \nabla^2 f(\bar{x})$ es continuo en $\bar{a}$

$\Rightarrow$ para el ε dado $\exists$ una bola $B(\bar{a}, h)$, $h > 0$ $\ni$

$|\varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{a})| < \frac{\varepsilon}{2}$ siempre que $\bar{x} \in B(\bar{a}, h)$.

$\Rightarrow$ escribamos a $\varphi(\bar{a})$ como $\varphi(\bar{a}) = \varphi(\bar{x}) + (\varphi(\bar{a}) - \varphi(\bar{x}))$ e integrando ambos lados sobre una esfera $V(t)$ con $t < h$ $\Rightarrow$

$$\int_{V(t)} \varphi(\bar{a}) dV = \int_{V(t)} \varphi(\bar{x}) dV + \int_{V(t)} (\varphi(\bar{a}) - \varphi(\bar{x})) dV \quad \cdots (1)$$

Aplicando Teo. de Gauss a $\int_{V(t)} \varphi(\bar{x}) dV$ e integrando el lado izquierdo de (1) resulta:

$\varphi(\bar{a}) |V(t)| = \int_{S(t)} \nabla f \cdot n \, dA + \int_{V(t)} (\varphi(\bar{a}) - \varphi(\bar{x})) dV$ pues $\varphi(\bar{x}) = \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$

$$\Rightarrow \quad \varphi(\bar{a})|V(t)| - \int_{S(t)} \nabla f \cdot n \, dA = \int_{V(t)} (\varphi(\bar{a}) - \varphi(\bar{x})) \, dV$$

$$\Rightarrow \left| \varphi(\bar{a})|V(t)| - \int_{S(t)} \frac{\partial f}{\partial n} dA \right| = \left| \int_{V(t)} (\varphi(\bar{a}) - \varphi(\bar{x})) dV \right| \leq \int_{V(t)} |\varphi(\bar{a}) - \varphi(\bar{x})| \, dV$$

$$\underset{\text{por hip.}}{<} \int_{V(t)} \frac{\varepsilon}{2} dV = \frac{\varepsilon}{2} |V(t)| < \varepsilon |V(t)|$$

$$\Rightarrow \left| \varphi(\bar{a}) - \frac{1}{|V(t)|} \int_{S(t)} \frac{\partial f}{\partial n} dA \right| < \varepsilon$$ que es a lo que se quería llegar,

por lo que basta con tomar $\delta = h$ para demostrar que

$$\nabla^2 f(\bar{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{|V(t)|} \int_{S(t)} \frac{\partial f}{\partial n} dA$$