18/11/2014

Ley de Gauss

Sea M una región de $\mathbb{R}^3$ del tipo IV. Entonces si $(0,0,0) \notin \partial M$ tenemos:

$$\int_{\partial M} \frac{F \cdot n}{r^3}\, dS = \begin{cases} 4\pi & \text{si } (0,0,0) \in M \\ 0 & \text{si } (0,0,0) \notin M \end{cases}$$

donde $F(x,y,z) = (x,y,z)$ y $r = \|F\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Dem.

Primero suponemos que $(0,0,0) \notin M \Rightarrow \frac{F}{r^3}$ es un campo vectorial C^1 en M y ∂M, $\Rightarrow$ por Teo. de Gauss

$$\int_{\partial M} \frac{F \cdot n}{r^3}\, dS = \int_M \nabla \cdot \left(\frac{F}{r^3}\right) dV$$

Recordando que $\nabla \cdot (fF) = f\, \nabla \cdot F + F \cdot \nabla f$ con f una función escalar y F un campo vectorial, $\Rightarrow f = \frac{1}{r^3}$ y $F = F$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \left(\frac{F}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} \nabla \cdot F + F \cdot \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\nabla \cdot F = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot (x,y,z) = 3$$

$$\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = \left(\frac{\partial(\frac{1}{r^3})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial(\frac{1}{r^3})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial(\frac{1}{r^3})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} \right) = \left(-\frac{3}{r^4}\frac{x}{r}, -\frac{3}{r^4}\frac{y}{r}, -\frac{3}{r^4}\frac{z}{r} \right)$$

$$= -\frac{3F}{r^5}$$

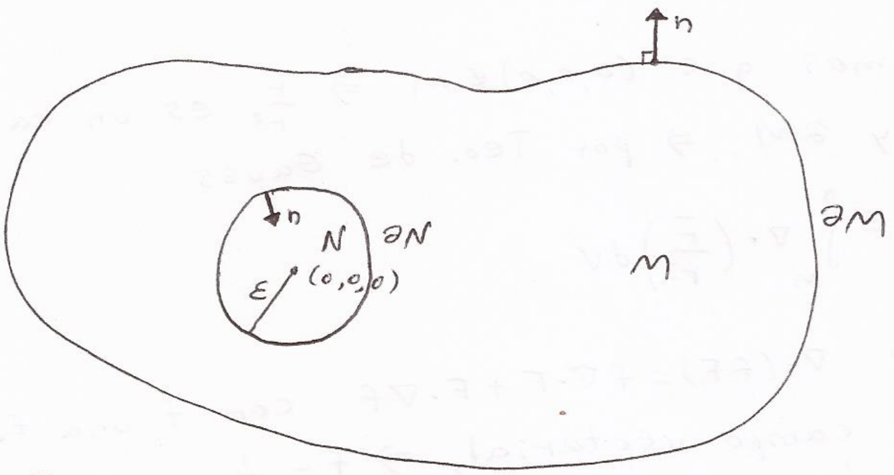
$$\Rightarrow \nabla \cdot \left(\frac{F}{r^3}\right) = \frac{3}{r^3} - \frac{3F \cdot F}{r^5} = \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = 0 \qquad \therefore \nabla \cdot \left(\frac{F}{r^3}\right) = 0 \text{ si } r \neq 0$$

$$\therefore \int_{\partial M} \frac{F \cdot n}{r^3}\, dS = 0 \qquad \text{si } (0,0,0) \notin M$$

Supongamos ahora que $(0,0,0) \in M$. No podemos seguir usando el método anterior pues F/r^3 no es suave en M (en vista del denominador cero en $F = (0,0,0)$). Como $(0,0,0) \in M$ y $(0,0,0) \notin \partial M \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \ni$ la bola N de radio ε con centro en

$(0,0,0)$ está completamente contenida en M. Ahora bien, sea Ω la región entre M y N, $\Rightarrow$ Ω tiene frontera $\partial M \cup \partial N = S$. Pero la orientación en ∂N inducida por la normal exterior en Ω es opuesta a la obtenida a partir de N. Ahora $\nabla \cdot \left(\frac{F}{r^3}\right) = 0$ en Ω, de modo que por el Teo. de Gauss (generalizado):

$$\int_S \frac{F \cdot n}{r^3} dS = \int_\Omega \nabla \cdot \left(\frac{F}{r^3}\right) dV = 0 \quad \cdots \text{①}$$



Como $$\int_S \frac{F \cdot n}{r^3} dS = \int_{\partial M} \frac{F \cdot n}{r^3} dS + \int_{\partial N} \frac{F \cdot n}{r^3} dS \quad \cdots \text{②}$$

donde n es la normal exterior a S, tenemos que por ① y ②

$$\int_{\partial M} \frac{F \cdot n}{r^3} dS = -\int_{\partial N} \frac{F \cdot n}{r^3} dS$$

Ahora bien, en ∂N, $n = -\frac{F}{r}$ y $r = \varepsilon$, pues ∂N es una esfera de radio ε $\Rightarrow$

$$-\int_{\partial N} \frac{F \cdot n}{r^3} dS = \int_{\partial N} \frac{F \cdot F}{r^4} dS = \int_{\partial N} \frac{1}{r^2} dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial N} dS = \frac{1}{\varepsilon^2}(4\pi\varepsilon^2) = 4\pi$$

$$\therefore \int_{\partial M} \frac{F \cdot n}{r^3} dS = 4\pi \quad \text{si } (0,0,0) \in M.$$

Con lo que se demuestra la Ley de Gauss.

18/11/2014

Ejercicio

Verificar que $G(\bar{x},\bar{y}) = -\frac{1}{4\pi\|\bar{x}-\bar{y}\|}$ es una función de Green para que $u(\bar{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\bar{x},\bar{y})\rho(\bar{y})d\bar{y}$ sea una solución a la ec. de Poisson $\nabla^2 u = \rho$.

Sol.

Una función de Green debe de satisfacer lo siguiente:

1) $G(\bar{x},y) = G(\bar{y},x)$

2) $\nabla^2 G(\bar{x},\bar{y}) = \delta(\bar{x}-\bar{y})$

donde la delta de Dirac satisface a su vez

i) $\delta(\bar{x}-\bar{y}) = 0$ si $\bar{x} \neq \bar{y}$

ii) $\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\bar{x}-\bar{y})d\bar{y} = 1$

Cláramente $G(\bar{x},\bar{y}) = G(\bar{y},\bar{x})$, pues $\|\bar{x}-\bar{y}\| = \|(-1)(\bar{y}-\bar{x})\|$ $= |-1|\,\|\bar{y}-\bar{x}\| = \|\bar{y}-\bar{x}\|$ $\Rightarrow$ cumple 1).

Veamos que cumpla 2)

Sea $\bar{r} = \bar{x}-\bar{y} = (x,y,z)$ y $r = \|\bar{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\Rightarrow G = -\frac{1}{4\pi r}$

$$\Rightarrow \nabla G = \left(\frac{\partial(-\frac{1}{4\pi r})}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial(-\frac{1}{4\pi r})}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial(-\frac{1}{4\pi r})}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}, \frac{1}{r^2}\frac{y}{r}, \frac{1}{r^2}\frac{z}{r}\right) = \frac{\bar{r}}{4\pi r^3}$$

y $\nabla^2 G = \nabla\cdot\nabla G = \nabla\cdot\left(\frac{\bar{r}}{4\pi r^3}\right) = \frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\left(\frac{\bar{r}}{r^3}\right) = 0$ pues ya se calculó en la Ley de Gauss (si $r\neq 0$)

$\therefore \nabla^2 G = \delta(\bar{r}) = 0$ si $r \neq 0$ (si $\bar{x}\neq\bar{y}$), $\therefore$ cumple i)

Para ii) sea B una bola alrededor de $\bar{x}$, por i) tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 G\, d\bar{y} = \int_B \nabla^2 G\, d\bar{y} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{por Teo. de} \\ \text{Gauss}}}{=} \int_{\partial B} \nabla G\cdot n\, dS = \int_{\partial B} \frac{\bar{r}\cdot n}{4\pi r^3} dS \underset{\substack{\downarrow \\ \text{por Ley de} \\ \text{Gauss}}}{=} 1$$

$\Rightarrow$ también se cumple ii)

$\therefore \nabla^2 G(\bar{x},\bar{y}) = \delta(\bar{x}-\bar{y})$ y se cumple 2).

$\therefore$ $u(\bar{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{-\rho(\bar{y})}{4\pi \|\bar{x}-\bar{y}\|} d\bar{y}$ es una solución a la ecuación de Poisson $\nabla^2 u = \rho$.