19/11/2014

Cuarto examen Parcial

1) Sea $P=(a,b)$ y se C_r la circunferencia de radio r y centro P. El valor medio de una función continua φ sobre C_r se define como la integral

$$I_\varphi(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(a+r\cos\theta,\, b+r\operatorname{sen}\theta)\,d\theta.$$

Pruebe que $f(x,y)=x^2-y^2$ es armónica. Compruebe la propiedad del valor medio para $f(x,y)$.

Sol.

$f(x,y)$ es armónica si $\nabla^2 f=0$

$$\Rightarrow \nabla^2 f=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2-2=0$$

Por otro lado, para comprobar la propiedad del valor medio hay que verificar que $f(P)$ sea igual a $I_f(r)$

$$\Rightarrow I_f(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+r\cos\theta,\, b+r\operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left((a+r\cos\theta)^2-(b+r\operatorname{sen}\theta)^2\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(a^2+2ar\cos\theta+r^2\cos^2\theta-b^2-2br\operatorname{sen}\theta-r^2\operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left((a^2-b^2)+2r(a\cos\theta-b\operatorname{sen}\theta)+r^2\cos(2\theta)\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[(a^2-b^2)\theta+2r(a\cancel{\operatorname{sen}\theta}^{\,0}+b\cancel{\cos\theta}^{\,0})+\frac{r^2}{2}\cancel{\operatorname{sen}(2\theta)}^{\,0}\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}(a^2-b^2)2\pi=a^2-b^2$$

y $f(P)=f(a,b)=a^2-b^2$

en donde claramente se verifica que $f(P)=a^2-b^2=I_f(r)$

2) Sea $F=(e^y, 2xe^{x^2}, 0)$, halle un campo vectorial $G \ni$ $\nabla \times G = F$ y use el Teo. de Stokes para comprobar que el flujo de G a través de S es cero, donde S es la semi-esfera superior de la esfera unitaria.

Sol.

Sea $F=(P,Q,R)=(e^y, 2xe^{x^2}, 0)$ y $G=(L,M,N)$, recordando que una solución al problema dado para que $\nabla \times G = F$ es:

$L=0$

$$M=\int_{x_0}^{x} R(t,y,z)\,dt - \int_{z_0}^{z} P(x_0,y,u)\,du$$

$$N=-\int_{x_0}^{x} Q(t,y,z)\,dt$$

$\Rightarrow$ $R(t,y,z)=0$

$P(0,y,u)=e^y$ con $x_0=z_0=0$ por simplicidad.

$Q(t,y,z)=2te^{t^2}$

$\Rightarrow$ $L=0$

$$M=-\int_0^z e^y\,du = -ue^y\Big|_0^z = -ze^y$$

$$N=-\int_0^x 2te^{t^2}\,dt = -e^{t^2}\Big|_0^x = 1-e^{x^2}$$

$\therefore$ $\underbrace{G(x,y,z)=(0,-ze^y,1-e^{x^2})}$

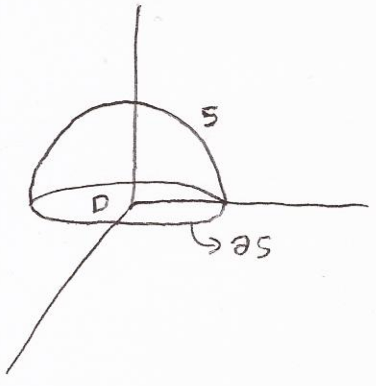
donde $\nabla \times G = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & -ze^y & 1-e^{x^2} \end{vmatrix} = (e^y, 2xe^{x^2}, 0) = F$

Ahora bien, por Teo. de Stokes aplicado a G sabemos

$$\int_{\partial S} G = \int_S (\nabla \times G)\cdot n\, dS$$

$\Rightarrow$ basta con ver que la integral de línea es cero, ya que la integral de superficie del rotacional representa el flujo buscado. (por simplicidad)

19/11/2014



sea $\phi(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$

con $(x,y) \in D$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

la parametrización de S, y sea

$\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ $t \in [0, 2\pi]$ la

parametrización de ∂S.

$\Rightarrow \gamma(t) = \phi(\sigma(t)) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ $t \in [0, 2\pi]$

y $\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$, $G(\gamma(t)) = (0, 0, 1 - e^{\cos^2 t})$

$$\therefore \int_S (\nabla \times G) \cdot n \, dS = \int_{\partial S} G = \int_0^{2\pi} G(\gamma) \cdot \gamma' \, dt = \int_0^{2\pi} (0,0,1-e^{\cos^2 t}) \cdot (\cos t, \operatorname{sen} t, 0) \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 0 \, dt = 0$$

$\therefore \int_S (\nabla \times G) \cdot n \, dS = 0$ y no hay flujo de G a través de S.

3) Sea $F = (x, y, z)$. Demuestre que si W es una región de $\mathbb{R}^3$ con frontera S, $\Rightarrow$

$$\text{Volumen}(W) = \frac{1}{3} \iint_S F \cdot ds$$

Sol.

Por Teo. de Gauss sabemos que $\int_W \nabla \cdot F \, dV = \int_S F \cdot n \, dS$

y como $F = (x, y, z) \Rightarrow \nabla \cdot F = 3$ $\therefore$

$$\int_W \nabla \cdot F \, dV = \int_W 3 \, dV = 3 \int_W dV = 3 \, \text{Volumen}(W)$$

y $3 \, \text{Volumen}(W) = \int_S F \cdot n \, dS$

$$\therefore \text{Volumen}(W) = \frac{1}{3} \iint_S F \cdot n \, dS$$