14/08/2014

Teorema

Sean $f,g : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrables sobre R. Entonces

a) $f+g$ es integrable sobre R y además $\int_R (f+g) = \int_R f + \int_R g$

b) Si $c \in \mathbb{R}$, cf es integrable sobre R y además $\int_R cf = c\int_R f$

c) fg es integrable sobre R.

d) Si $f(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in R \Rightarrow \int_R f \geq 0$

e) Si $f(\bar{x}) \leq g(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in R \Rightarrow \int_R f \leq \int_R g$

f) $|f|$ es integrable sobre R y además $\left|\int_R f\right| \leq \int_R |f|$.

Demos.

a) Como f y g son integrables sobre $R \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists P$ partición de $R \ \ni$

$$\bar{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \frac{\varepsilon}{2} \quad y \quad \bar{S}(g,P) - \underline{S}(g,P) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow \bar{S}(f,P) + \bar{S}(g,P) - \underline{S}(f,P) - \underline{S}(g,P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \cdots ①$

Como $\bar{S}(f,P) = \sum_{i,j} M'_{ij} A(R_{ij})$ y $\bar{S}(g,P) = \sum_{i,j} M''_{ij} A(R_{ij})$

$\Rightarrow \bar{S}(f,P) + \bar{S}(g,P) = \sum_{i,j} (M'_{ij} + M''_{ij}) A(R_{ij})$

Sea $\bar{S}(f+g,P) \equiv \bar{S}(f,P) + \bar{S}(g,P)$ y $M_{ij} = M'_{ij} + M''_{ij}$ $\therefore$

$\bar{S}(f+g,P) = \sum_{i,j} M_{ij} A(R_{ij})$, y de manera análoga

$\underline{S}(f+g,P) = \sum_{i,j} m_{ij} A(R_{ij})$ donde $m_{ij} = m'_{ij} + m''_{ij}$ y

$\underline{S}(f+g,P) \equiv \underline{S}(f,P) + \underline{S}(g,P) \cdots ②$, por lo cual, de ① se sigue que $\bar{S}(f+g,P) - \underline{S}(f+g,P) < \varepsilon$ $\therefore$ $f+g$ es integrable sobre R

Ahora bien, como f, g y $f+g$ son integrables sobre $R \Rightarrow$

$\underline{\int}_R f = \bar{\int}_R f = \int_R f$, $\underline{\int}_R g = \bar{\int}_R g = \int_R g$ y $\underline{\int}_R (f+g) = \bar{\int}_R (f+g) = \int_R (f+g) \quad \cdots ③$

y de la expresión ② al sacar supremos $\Rightarrow$
$\sup\{\underline{S}(f+g,P)\} = \sup\{\underline{S}(f,P)\} + \sup\{\underline{S}(g,P)\}$ y esto implica que
$\underline{\int_R}(f+g) = \underline{\int_R} f + \underline{\int_R} g$ pero por las relaciones ③

$$\Rightarrow \int_R (f+g) = \int_R f + \int_R g$$

b) como f es integrable sobre R $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists P$ partición de R $\ni$
$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \frac{\varepsilon}{c}$ con $c \in \mathbb{R}$ $c \neq 0$ ... ①
$\Rightarrow c\overline{S}(f,P) = c\sum_{i,j} M_{ij} A(R_{ij}) = \sum_{i,j} cM_{ij} A(R_{ij}) \equiv \overline{S}(cf,P)$, de manera análoga $c\underline{S}(f,P) = \underline{S}(cf,P)$ ... ②
$\Rightarrow$ al multiplicar ① por c tenemos
$c\overline{S}(f,P) - c\underline{S}(f,P) = \overline{S}(cf,P) - \underline{S}(cf,P) < \cancel{c}\frac{\varepsilon}{\cancel{c}} = \varepsilon$ $\therefore$
$\overline{S}(cf,P) - \underline{S}(cf,P) < \varepsilon$ $\therefore$ cf es integrable sobre R.
Por otro lado, al sacar supremos en ② tenemos que
$\sup\{c\underline{S}(f,P)\} = \sup\{\underline{S}(cf,P)\}$ y $\sup\{c\underline{S}(f,P)\} = c\sup\{\underline{S}(f,P)\}$
$\Rightarrow c\underline{\int_R} f = \underline{\int_R} cf$ y nuevamente como f y cf son integrables en R $\Rightarrow$ $\underline{\int_R} f = \overline{\int_R} f = \int_R f$ y $\underline{\int_R} cf = \overline{\int_R} cf = \int_R cf$

$$\therefore c\int_R f = \int_R cf$$

c) fg puede escribirse como $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$ y las funciones f+g y f−g son integrables, $\Rightarrow$ basta con probar que el cuadrado de una función integrable es integrable.
Sea h integrable en R. Al ser h acotada $\Rightarrow \exists K > 0 \ni |h(\bar{x})| \leq K$ $\forall \bar{x} \in R$ y por ser integrable $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists P$ partición de R $\ni$
$\overline{S}(h,P) - \underline{S}(h,P) = \sum_{i,j}(M_{ij} - m_{ij}) A(R_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2K}$ ... ✪

14/08/2014

Ahora, para esta partición y para h^2 tenemos que

$$\overline{S}(h^2,P)-\underline{S}(h^2,P)=\sum_{i,j}(M'_{ij}-m'_{ij})A(R_{ij}) \Rightarrow$$

1) Si $0\leq m_{ij}\leq M_{ij} \Rightarrow M'_{ij}=M^2_{ij}$ y $m'_{ij}=m^2_{ij}$ de donde obtenemos

$$M'_{ij}-m'_{ij}=M^2_{ij}-m^2_{ij}=(M_{ij}+m_{ij})(M_{ij}-m_{ij})$$

$$\therefore M'_{ij}-m'_{ij}=(M_{ij}+m_{ij})(M_{ij}-m_{ij}) \cdots ①$$

2) Si $m_{ij}\leq M_{ij}\leq 0 \Rightarrow M'_{ij}=m^2_{ij}$ y $m'_{ij}=M^2_{ij} \Rightarrow$

$$M'_{ij}-m'_{ij}=-(M^2_{ij}-m^2_{ij})=-(M_{ij}+m_{ij})(M_{ij}-m_{ij})=|M_{ij}+m_{ij}|(M_{ij}-m_{ij})$$

$$\therefore M'_{ij}-m'_{ij}=|M_{ij}+m_{ij}|(M_{ij}-m_{ij}) \cdots ②$$

3) $m_{ij}<0<M_{ij} \Rightarrow M'_{ij}=\max\{m^2_{ij},M^2_{ij}\}$ y $m'_{ij}=\min\{m^2_{ij},M^2_{ij}\}$

$$\Rightarrow M'_{ij}-m'_{ij}=|M^2_{ij}-m^2_{ij}|=|M_{ij}+m_{ij}||M_{ij}-m_{ij}|=|M_{ij}+m_{ij}|(M_{ij}-m_{ij})$$

$$\therefore M'_{ij}-m'_{ij}=|M_{ij}+m_{ij}|(M_{ij}-m_{ij}) \cdots ③$$

$\Rightarrow$ de ①, ② y ③ se concluye que $M'_{ij}-m'_{ij}=|M_{ij}+m_{ij}|(M_{ij}-m_{ij})$

$$\therefore \overline{S}(h^2,P)-\underline{S}(h^2,P)=\sum_{i,j}(M'_{ij}-m'_{ij})A(R_{ij})=\sum_{i,j}|M_{ij}+m_{ij}|(M_{ij}-m_{ij})A(R_{ij})$$

$$\leq \sum_{i,j}2K(M_{ij}-m_{ij})A(R_{ij})=2K\sum_{i,j}(M_{ij}-m_{ij})A(R_{ij}) \underset{\text{por Ⓐ}}{<} 2K\frac{\varepsilon}{2K}=\varepsilon$$

$\therefore \overline{S}(h^2,P)-\underline{S}(h^2,P)<\varepsilon$ $\therefore h^2$ es integrable y en consecuencia fg es integrable sobre R.

d) Como $f(\bar{x})\geq 0 \quad \forall \bar{x}\in R \Rightarrow M_{ij}\geq 0 \Rightarrow M_{ij}A(R_{ij})\geq 0$

$\Rightarrow \sum_{i,j}M_{ij}A(R_{ij})\geq 0 \Rightarrow \overline{S}(f,P)\geq 0$ y al tomar el ínfimo tenemos que $\inf\{\overline{S}(f,P)\}\geq 0$, i,e $\overline{\int_R} f\geq 0$, pero como f es integrable $\Rightarrow \underline{\int_R} f=\overline{\int_R} f=\int_R f$

$$\therefore \int_R f\geq 0$$

e) Como $f(\bar{x}) \leq g(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in R \Rightarrow 0 \leq g(\bar{x}) - f(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in R$ y por el inciso d) $\Rightarrow \int_R (g-f) \geq 0$ y por el inciso a)

$$0 \leq \int_R (g-f) = \int_R g - \int_R f \qquad \therefore \int_R f \leq \int_R g$$

f) Como $|f| = \begin{cases} f & \text{si } f \geq 0 \\ -f & \text{si } f < 0 \end{cases}$, si tomamos las funciones definidas por:

$$f^+ = \begin{cases} f & \text{si } f \geq 0 \\ 0 & \text{si } f < 0 \end{cases} \quad y \quad f^- = \begin{cases} 0 & \text{si } f \geq 0 \\ -f & \text{si } f < 0 \end{cases}$$

donde claramente se observa que $|f| = f^+ + f^-$ y $f = f^+ - f^-$.

Ahora, $|f|$ será integrable sobre R si f^+ y f^- lo son.

Veamos que f^+ es integrable sobre R:

Como f es integrable $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists P$ partición de R $\ni$

$\bar{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \sum_{i,j} (M_{ij} - m_{ij}) A(R_{ij}) < \varepsilon$ y para la misma partición

$$\bar{S}(f^+,P) - \underline{S}(f^+,P) = \sum_{i,j} (M'_{ij} - m'_{ij}) A(R_{ij})$$

Ahora bien:

1) Si $0 \leq m_{ij} \leq M_{ij} \Rightarrow 0 \leq f = f^+$ en $R_{ij} \Rightarrow M'_{ij} - m'_{ij} = M_{ij} - m_{ij}$

2) Si $m_{ij} \leq M_{ij} \leq 0 \Rightarrow f \leq 0 = f^+$ en R_{ij}

$\Rightarrow M'_{ij} - m'_{ij} = 0 - 0 \leq M_{ij} - m_{ij}$

3) $m_{ij} < 0 < M_{ij} \Rightarrow m_{ij} < 0 = m'_{ij} \leq M'_{ij} = M_{ij}$ en R_{ij}

$\Rightarrow M'_{ij} - m'_{ij} < M_{ij} - m_{ij}$

$\therefore$ de los 3 casos se concluye que $M'_{ij} - m'_{ij} \leq M_{ij} - m_{ij}$

$\Rightarrow \bar{S}(f^+,P) - \underline{S}(f^+,P) \leq \bar{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$

$\therefore f^+$ es integrable en R, ahora, como $f = f^+ - f^- \Rightarrow f^- = f^+ - f$ y como f y f^+ son integrables $\Rightarrow f^-$ es integrable

14/08/2014

y como f^+ y f^- son integrables $\Rightarrow$ $|f|$ es integrable en R.

Por otro lado, sea $I = \int_R f$

$$\Rightarrow |I||I| = |I|^2 = I^2 = I \cdot I = I \int_R f \underset{\text{por b)}}{=} \int_R I f \leq \int_R |If| = \int_R |I||f| \underset{\text{por b)}}{=} |I| \int_R |f|$$

$$\therefore \cancel{|I|}\,|I| \leq \cancel{|I|} \int_R |f| \Rightarrow |I| \leq \int_R |f| \quad \text{i,e}$$

$$\left| \int_R f \right| \leq \int_R |f| \qquad \blacktriangle$$