19/08/2014

Contenido cero, medida cero y Fubini:

1) Si A tiene medida cero y $B \subset A \Rightarrow B$ tiene medida cero.

Dem.

Como A tiene medida cero $\Rightarrow \exists$ una colección numerable de rectángulos $Q_i \ni A \subset \bigcup_i^n Q_i$ y $\sum_i^n v(Q_i) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$, y como $B \subset A$ B también tiene una colección numerable de rectángulos $Q_i \ni B \subset \bigcup_i^K Q_i$ para algún K que SPG puede ser $K \leq n \Rightarrow$

$$\underbrace{\sum_i^K v(Q_i)}_{\text{para } B} \leq \underbrace{\sum_i^n v(Q_i)}_{\text{para } A} < \varepsilon \qquad \therefore \sum_i^K v(Q_i) < \varepsilon$$

$\therefore B$ tiene medida cero ▲

2) Si A tiene contenido cero $\Rightarrow A$ tiene medida cero.

Dem.

Como A tiene contenido cero $\Rightarrow \exists$ una colección finita de rectángulos $Q_i \ni A \subset \bigcup_i^n Q_i \Rightarrow A \subset \bigcup_i^n Q_i \cup Q_{n+1} \cup Q_{n+2} \cup \cdots \cup Q_{n+m} \cup \cdots$

$\Rightarrow A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$. Por otra parte, $\forall \varepsilon > 0$ podemos tener $v(Q_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n v(Q_i) + v(Q_{n+1}) + v(Q_{n+2}) + \cdots < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2^i} + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} + \cdots$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^\infty v(Q_i) < \lim_{r\to\infty} \sum_{i=1}^r \frac{\varepsilon}{2^i} = \lim_{r\to\infty} \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{r-1}}\right) = \frac{\varepsilon}{2} \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{2^r}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \varepsilon \lim_{r\to\infty}\left(1 - \cancelto{0}{\frac{1}{2^r}}\right) = \varepsilon \qquad \therefore \sum_{i=1}^\infty v(Q_i) < \varepsilon$$

$\therefore A$ tiene medida cero ▲

3) Calcular las siguientes integrales e intercambiar los límites y verificar que sean iguales, i,e

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dy\,dx \qquad \text{(Fubini)}$$

a) $\int_1^3 \int_0^2 x \ln y \, dx\,dy$

b) $\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3y^2 \tan x \, dx\,dy$

c) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{2xy\,dx\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

a) $\int_1^3\int_0^2 x\ln y\,dx\,dy = \int_1^3 \left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^2\right)\ln y\,dy = 2\int_1^3 \ln y\,dy = 2\left(y\ln y - y\Big|_1^3\right)$

$= 2\left[3\ln 3 - 3 - 1\cdot\cancel{\ln 1}^{0} + 1\right] = 6\ln 3 - 4$

Intercambiando los límites de integración tenemos

$\int_0^2\int_1^3 x\ln y\,dy\,dx = \int_0^2 x\left(y\ln y - y\Big|_1^3\right)dx = (3\ln 3 - 2)\int_0^2 x\,dx$

$= (3\ln - 2)\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^2\right) = 6\ln 3 - 4$

$\therefore \int_1^3\int_0^2 x\ln y\,dx\,dy = 6\ln 3 - 4 = \int_0^2\int_1^3 x\ln y\,dy\,dx.$

b) $\int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3y^2\tan x\,dx\,dy = \int_0^2 3y^2\left(\ln(\sec x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)dy$

$= 3\int_0^2 y^2\left[\ln(\sec(\tfrac{\pi}{4})) - \ln(\cancel{\sec(0)}^{0})\right]dy = 3\ln\sqrt{2}\int_0^2 y^2\,dy = \cancel{3}\ln\sqrt{2}\left(\frac{y^3}{\cancel{3}}\Big|_0^2\right)$

$= 8\ln\sqrt{2} = 4\ln 2$

Intercambiando los límites de integración tenemos

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^2 3y^2\tan x\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cancel{3}\left(\frac{y^3}{\cancel{3}}\Big|_0^2\right)\tan x\,dx = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx = 8\left(\ln(\sec x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)$

$= 8\ln\sqrt{2} = 4\ln 2$

$\therefore \int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3y^2\tan x\,dx\,dy = 4\ln 2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^2 3y^2\tan x\,dy\,dx$

c) $\int_0^1\int_0^1 \frac{2xy\,dx\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \int_0^1\int_0^1 u^{-1/2}y\,du\,dy = \int_0^1 y\left(2u^{1/2}\Big|_0^1\right)dy$

$u = 1+x^2+y^2$
$du = 2x\,dx$

$= \int_0^1 2y\left(\sqrt{1+x^2+y^2}\Big|_0^1\right)dy = \int_0^1 2y\left[\sqrt{2+y^2} - \sqrt{1+y^2}\right]dy = \int_0^1 2y\sqrt{2+y^2}\,dy - \int_0^1 2y\sqrt{1+y^2}\,dy$

$v = 2+y^2$ $\quad$ $w = 1+y^2$
$dv = 2y\,dy$ $\quad$ $dw = 2y\,dy$

19/08/2014

$$= \int_0^1 v^{1/2}\,dv - \int_0^1 w^{1/2}\,dw = \frac{2}{3}\left(v^{3/2}\Big|_0^1 - w^{3/2}\Big|_0^1 \right) = \frac{2}{3}\left[(2+y^2)^{3/2}\Big|_0^1 - (1+y^2)^{3/2}\Big|_0^1 \right]$$

$$= \frac{2}{3}\left(3^{3/2} - 2^{3/2} - (2^{3/2} - 1) \right) = \underline{\frac{2}{3}\left(3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 1 \right)}$$

Intercambiando los límites de integración tenemos

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{2xy\,dy\,dx}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \int_0^1\int_0^1 u^{-1/2}x\,du\,dx = \int_0^1 x\left(2u^{1/2}\Big|_0^1\right)dx = \int_0^1 2x\left(\sqrt{1+x^2+y^2}\Big|_0^1\right)dx$$

$u = 1+x^2+y^2$
$du = 2y\,dy$

$$= \int_0^1 2x\left[\sqrt{2+x^2} - \sqrt{1+x^2}\right]dx = \int_0^1 2x\sqrt{2+x^2}\,dx - \int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

$v = 2+x^2$ $\quad$ $w = 1+x^2$
$dv = 2x\,dx$ $\quad$ $dw = 2x\,dx$

$$= \int_0^1 v^{1/2}\,dv - \int_0^1 w^{1/2}\,dw = \frac{2}{3}\left(v^{3/2}\Big|_0^1 - w^{3/2}\Big|_0^1 \right) = \frac{2}{3}\left[(2+x^2)^{3/2}\Big|_0^1 - (1+x^2)^{3/2}\Big|_0^1 \right]$$

$$= \frac{2}{3}\left(3^{3/2} - 2^{3/2} - (2^{3/2} - 1) \right) = \underline{\frac{2}{3}\left(3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 1 \right)}$$

$$\therefore \underline{\int_0^1\int_0^1 \frac{2xy\,dx\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \frac{2}{3}\left(3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 1\right) = \int_0^1\int_0^1 \frac{2xy\,dy\,dx}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}$$