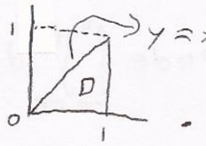
02/09/2014

Teorema del valor medio e integrales de funciones impropias.

1) Mostrar que $\frac{1}{6} \leq \int_D \frac{dydx}{y-x+3} \leq \frac{1}{4}$ donde D es 

Encontremos m y M $\ni$ $m \leq y-x+3 \leq M$ en D, en donde es fácil ver que $M=3$ y $m=2$, ya que son el máximo y el mínimo valor posible, respectivamente, de puntos $(x,y) \in D$, donde $M = 3 = g(x,x)$ y $m = 2 = g(1,0)$ con $g(x,y) = y-x+3$.

$\Rightarrow \quad 2 \leq y-x+3 \leq 3 \quad \forall (x,y) \in D \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} \leq \frac{1}{y-x+3} \leq \frac{1}{2} \quad \forall (x,y) \in D$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{3}\, dydx \leq \int_0^1 \int_0^x \frac{dydx}{y-x+3} \leq \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{2}\, dydx$$

en donde $\int_0^1 \int_0^x dydx = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} = A(D)$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right) \leq \int_0^1 \int_0^x \frac{dydx}{y-x+3} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \therefore \quad \frac{1}{6} \leq \int_D \frac{dydx}{y-x+3} \leq \frac{1}{4}$$

2) Si $f(x,y) = e^{\operatorname{Sen}(x+y)}$ y $R = [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$, mostrar que

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_R f \leq e.$$

$\operatorname{Sen}(x+y)$ es una función periódica que oscila entre 1 y -1

$\Rightarrow$ Si $\operatorname{Sen}(x+y) = 1 \Rightarrow x+y = \frac{\pi}{2}$, donde $x=0, y=\frac{\pi}{2}$, ó, $x=\frac{\pi}{2}, y=0$, ó, $x=\frac{\pi}{4}, y=\frac{\pi}{4}$, etc.

Si $\operatorname{Sen}(x+y) = -1 \Rightarrow x+y = -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ donde $x=0, y=-\frac{\pi}{2}$, ó, $x=-\frac{\pi}{2}, y=0$, ó, $x=-\frac{\pi}{4}, y=-\frac{\pi}{4}$, ó, $x=\pi, y=\frac{\pi}{2}$, etc.

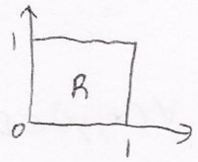
$\therefore$ esto conlleva a que $e^{-1} = m \leq e^{\operatorname{Sen}(x+y)} \leq M = e^{1}$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{e}\,dx\,dy \leq \int_R f\,dx\,dy \leq \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e\,dx\,dy$$

donde $\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\,dy = 4\pi^2 \Rightarrow \frac{4\pi^2}{e} \leq \int_R f \leq 4\pi^2 e$

$$\therefore \frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2}\int_R f \leq e$$

③ Mostrar que $\frac{1}{2}(1-\cos(1)) \leq \int_R \frac{\operatorname{sen} x}{1+(xy)^4}\,dx\,dy \leq 1$ con $R=[0,1]\times[0,1]$



Por un lado, sabemos que $\operatorname{sen} x \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]$ y, más aún, se sigue cumpliendo que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1+(xy)^4} \leq 1 \quad \forall (x,y)\in R$$

, ya que los valores de (x,y) están entre 0 y 1, por lo cual, el denominador de la función es siempre ≥ 1.

$$\Rightarrow \int_R \frac{\operatorname{sen} x}{1+(xy)^4}\,dx\,dy \leq \int_0^1\int_0^1 1\,dx\,dy = 1 \quad \ldots ①$$

Por otro lado, analicemos $1+(xy)^4$:

es fácil ver que $1+(xy)^4 \leq 2 \quad \forall (x,y)\in R$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+(xy)^4} \quad \forall (x,y)\in R \quad \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{2} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{1+(xy)^4} \quad \forall (x,y)\in R$$

$$\Rightarrow \int_0^1\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{2}\,dx\,dy \leq \int_R \frac{\operatorname{sen} x}{1+(xy)^4}\,dx\,dy$$

y $\int_0^1\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{2}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen} x\,dx = -\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}(\cos(1)-1)$

$$= \frac{1}{2}(1-\cos(1))$$

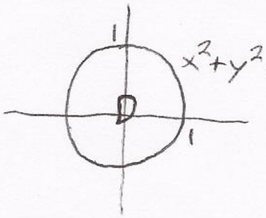
$$\therefore \frac{1}{2}(1-\cos(1)) \leq \int_R \frac{\operatorname{sen} x}{1+(xy)^4}\,dx\,dy \quad \ldots ②$$

02/09/2014

$\therefore$ de ① y ② se concluye lo deseado.

$$\frac{1}{2}(1-\cos(1)) \leq \int_B \frac{\operatorname{sen} x}{1+(xy)^4}\,dx\,dy \leq 1$$

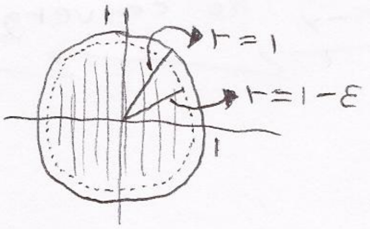
④ Mostrar si converge o no la $\int_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ donde D es el disco unitario.



Haciendo primero cambio a coordenadas polares tenemos que

$$\int_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{1-r^2}}$$

y aquí podemos ver que $\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$ se indetermina para $r=1$, i,e $\forall (x,y)\in D$ $\ni$ $x^2+y^2=1$, i,e la frontera del disco, por lo cual, hacemos la integral sobre la siguiente región y sacamos el límite cuando $\varepsilon \to 0$



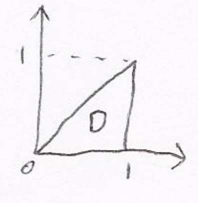
$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{1-r^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{1-\varepsilon} u^{-1/2}\,du$$

$u = 1-r^2$
$du = -2r\,dr$

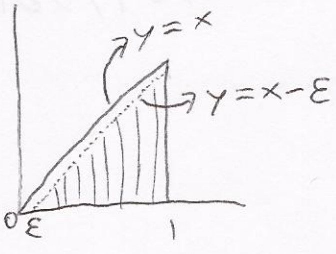
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -\pi\left(2(1-r^2)^{1/2}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} -\pi\left(2\left(\sqrt{\cancel{1}-\cancel{1}+2\varepsilon-\varepsilon^2}-1\right)\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} 2\pi\left(1-\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}\right) = 2\pi \qquad \therefore \int_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \text{ converge}$$

⑤ Mostrar si converge o no $\int_D \frac{dx\,dy}{x-y}$ don D es la región entre $0\leq x\leq 1$ y $0\leq y\leq x$.



se puede observar que $\frac{1}{x-y}$ se indetermina $\forall (x,y)\in D$ $\ni$ $y=x$, $\therefore$ haremos la integral sobre la siguiente región sacando el límite cuando $\varepsilon\to 0$.



$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\int_{0}^{x-\varepsilon}\frac{dy\,dx}{x-y} = \lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{\varepsilon}^{1}\int_{0}^{x-\varepsilon}\frac{du}{u}\,dx$$

$u = x-y$
$du = -dy$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{\varepsilon}^{1}\left(\ln(x-y)\Big|_{0}^{x-\varepsilon}\right)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{\varepsilon}^{1}(\ln\varepsilon - \ln x)\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -\left(x\ln\varepsilon - x\ln x + x\right)\Big|_{\varepsilon}^{1}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -\left(\ln\varepsilon + 1 - \varepsilon\cancel{\ln\varepsilon} + \varepsilon\cancel{\ln\varepsilon} - \varepsilon\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\overset{\nearrow 0}{\cancel{\varepsilon}} - \overset{\nearrow\infty}{\cancel{\ln}\,\varepsilon} - 1\right) \to \infty$$

Como $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\int_{0}^{x-\varepsilon}\frac{dy\,dx}{x-y} \to \infty$ $\therefore$ $\int_{D}\frac{dy\,dx}{x-y}$ no converge.