Rotacional de un Campo Vectorial

Definición 1. *Supongamos un campo* $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ *diferenciable definido en el conjunto abierto* U *de* $\mathbb{R}^3$. *Se define el rotacional de* F *en el punto* p *de* U, *denotado por rot F(p), como*

$$rot\ F(p) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}(p) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(p), \frac{\partial F_1}{\partial z}(p) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(p), \frac{\partial F_2}{\partial x}(p) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(p)\right)$$

donde las derivadas parciales de las funciones componentes de F, $F_1, F_2, F_3 : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se evaluan en el punto p.
Al ser rot F(p) vector podemos hablar de $rot\ F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el cual a cada punto $p \in U$ le asocia el vector F(p)$\in \mathbb{R}^3$.
Con el operador nabla

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

podemos escribir

$$rot\ F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}(p) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(p), \frac{\partial F_1}{\partial z}(p) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(p), \frac{\partial F_2}{\partial x}(p) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(p)\right)$$

Ejemplo Calcular el rotacional del campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (x^2y, x + 3y + z, xyz^3)$

Solución En este caso se tiene

$$rot\ F = \nabla\times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & x+3y+z & xyz^3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial xyz^3}{\partial y} - \frac{\partial x + 3y + z}{\partial z}, \frac{\partial x^2y}{\partial z} - \frac{\partial xyz^3}{\partial x}, \frac{\partial x + 3y + z}{\partial x} - \frac{\partial x^2y}{\partial y}\right)$$

$$= (xz^3 - 1, -yz^3, 1 - x^2)$$

Recordando el Teorema de Green

Teorema 1. *Sea* D *una región simplemente conexa con un borde* C *(suave) orientado positivamente. Si el campo vectorial* $F(x, y) = M(x, y)\hat{i} + N(x, y))\hat{j}$ *es continuamente diferenciable en* D *tenemos que*

$$\int_D M \quad dx + N \quad dy = \int\int_D \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \quad dA$$

Suponga ahora que dado un campo vectorial $F = (M, N) \subset \mathbb{R}^2$ lo escribimos $F = (M, N, 0) \subset \mathbb{R}^3$ y en este caso

$$rot\ F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z}, \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

si hacemos

$$rot\ F \cdot \hat{k} = \left(-\frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z}, \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \cdot (0, 0, 1) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

por lo tanto obtenemos una forma vectorial del teorema de Green

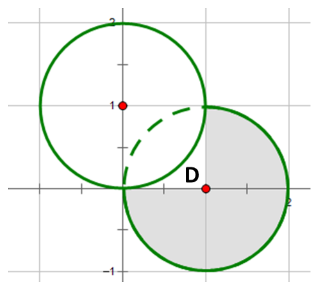
Teorema 2. *Sea D una región simplemente conexa con un borde C (suave) orientado positivamente. Si el campo vectorial $F(x,y) = M(x,y)\hat{\imath} + N(x,y))\hat{\jmath}$ es continuamente diferenciable en D tenemos que*

$$\int_D M \quad dx + N \quad dy = \int\int_D \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \quad dA = \int\int_D rot\ F \cdot \hat{k} \quad dA$$

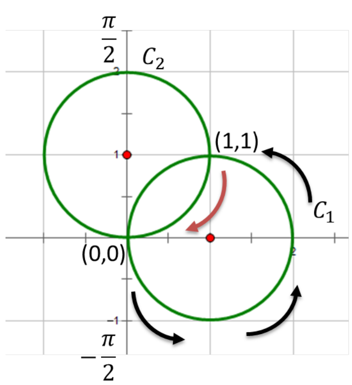
Ejemplo Usando lo anterior calcular

$$\int_{Fr(D)} x^2 dx + xydy$$

donde D es la región dentro del circulo $x^2 + y^2 - 2x = 0$ y fuera del circulo $x^2 + y^2 - 2y = 0$



Solución Se pide calcular $\int_D M \quad dx + N \quad dy$, para esto primero identificamos $Fr(D)$



Parametrizamos los circulos
Necesito ir de (0,0) a (1,1) por lo tanto

$$C_{(1)}(t) = (\cos(t) + 1, \operatorname{sen}(t)) \quad t \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$$

Necesito ir de (1,1) a (0,0)

$$C_{(2)}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t) + 1) \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

esta parametrización va de (0,0) a (1,1) por lo que la integral sobre esta parte de la Fr(D) debera multiplicarse por (-1)

tenemos entonces que

$$\int_{Fr(D)} x^2 \quad dx + xy \quad dy = \int_{Fr(C_1)} x^2 \quad dx + xy \quad dy + \int_{Fr(c_2)} x^2 \quad dx + xy \quad dy$$

con las parametrizaciones se tiene

$$\int_{Fr(C_1)} x^2 \quad dx + xy \quad dy + \int_{Fr(c_2)} x^2 \quad dx + xy \quad dy = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t)+1)^2(-\operatorname{sen}(t)) + (\cos(t)+1)(\operatorname{sen}(t))(\cos(t))dt$$

$$+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2(t)(-\operatorname{sen}(t)) + (\cos(t))(\operatorname{sen}(t)+1)(\cos(t))dt = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

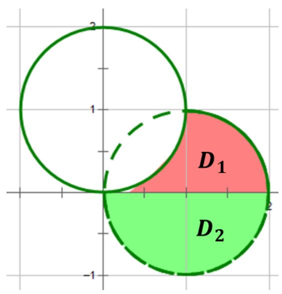
Ahora vamos a calcular $\int\int_D rot\ F \cdot \hat{k}\ dx\ dy$
para esto calculamos el rotacional

$$rot\ F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & xy & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial xy}{\partial z}, \frac{\partial x^2}{\partial z}, \frac{\partial xy}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial y}\right) = (0,0,y)$$

por lo que

$$\int\int_D rot\ F \cdot \hat{k}\ dx\ dy = \int\int_D y\ dx\ dy$$

requerimos dividir la región D



Usaremos coordenadas polares.
Para D_2 y D_1 se tiene

$$x^2+y^2-2x=0 \ \Rightarrow\ (r\cos(\theta))^2 + (r\operatorname{sen}(\theta))^2 - 2r\cos(\theta) = 0$$

$$r = 2\cos(\theta) \qquad r \in [0, 2\cos(\theta)], \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

$$x^2+y^2-2y=0 \ \Rightarrow\ (r\cos(\theta))^2 + (r\operatorname{sen}(\theta))^2 - 2r\operatorname{sen}(\theta) = 0$$

$$r = 2\operatorname{sen}(\theta) \qquad r \in [2\operatorname{sen}(\theta), 2\cos(\theta)], \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

Por lo tanto la integral doble nos queda

$$\int\int_D y\,dx\,dy = \int\int_{D_1} y\ dx\ dy + \int\int_{D_2} y\ dx\ dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{2\operatorname{sen}(\theta)}^{2\cos(\theta)} r^2\operatorname{sen}(\theta)\ dr\ d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \int_0^{2\cos(\theta)} r^2 \operatorname{sen}(\theta)\ dr\ d\theta = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$