Rotacional, Divergencia, Gradiente

Reconstrucción de un campo vectorial a partir de su rotacional
Dado un campo vectroial $F = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ ¿hay un campo $G = L\hat{i} + M\hat{j} + N\hat{k}$ tal que rot G=F?

Teorema 1. *Si F es un csampo vectorial de clase c^1 definido en $\mathbb{R}^3$ tal que div $F = 0$ entonces existe un campo vectorial G de clase c^1 de modo que*

$$rot\ G = F$$

Demostración. Si $F = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ y $G = L\hat{i} + M\hat{j} + N\hat{k}$ se tiene entonces

$$rot\ G = \nabla \times G = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ L & M & N \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right)$$

se debe cumplir

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = P$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = Q$$
$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = R$$

tomando $L = 0$ se llega a

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = P$$
$$-\frac{\partial N}{\partial x} = Q$$
$$\frac{\partial M}{\partial x} = R$$

Integrando la segunda expresión se tiene

$$N(x, y, z) = -\int_{x_0}^{x} Q(t, y, z)\ dt + f(y, z)$$

tomamos $f(y, z) = 0$

$$N(x, y, z) = -\int_{x_0}^{x} Q(t, y, z)\ dt$$

Integrando la tercera expresión se tiene

$$M(x, y, z) = -\int_{x_0}^{x} R(t, y, z)\ dt + g(y, z)$$

Sustituimos ambas expresiones en la ecuación

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = P$$

y obtenemos

$$\frac{\partial\left(-\int_{x_0}^{x} Q(t,y,z)\ dt\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(-\int_{x_0}^{x} R(t,y,z)\ dt + g(y,z)\right)}{\partial z} = P$$

$$\frac{\partial\left(-\int_{x_0}^{x} Q(t,y,z)\ dt\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(-\int_{x_0}^{x} R(t,y,z)\ dt\right)}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial z} = P$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial\left(-Q(t,y,z)\ dt\right)}{\partial y} - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial\left(-R(t,y,z)\ dt\right)}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial z} = P$$

$$\int_{x_0}^{x} \left(-\frac{\partial Q}{\partial y}(t,y,z) - \frac{\partial R}{\partial y}(t,y,z)\right)\ dt - \frac{\partial g}{\partial z} = P$$

como $div\ F = 0$ entonces

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial z}$$

por lo tanto

$$\int_{x_0}^{x} \left(-\frac{\partial Q}{\partial y}(t,y,z) - \frac{\partial R}{\partial y}(t,y,z)\right)\ dt - \frac{\partial g}{\partial z} = P \ \Rightarrow\ \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial P}{\partial x}(t,y,z)\right)\ dt - \frac{\partial g}{\partial z} = P$$

$$\Rightarrow\ P(x,y,z) - P(x_0,y,z) - \frac{\partial g}{\partial z} = P$$

esto quiere decir

$$-P(x_0,y,z) - \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\partial g}{\partial z} = -P(x_0,y,z) \ \Rightarrow\ g(y,z) = -\int_{z_0}^{z} P(x_0,y,u)\ du$$

y asi tenemos el campo $G = L\hat{\imath} + M\hat{\jmath} + N\hat{k}$ dado por

$$L(x,y,z) = 0$$

$$M(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} R(t,y,z)\ dt - \int_{z_0}^{z} P(x_0,y,u)\ du$$

$$N(x,y,z) = -\int_{x_0}^{x} Q(x_0,y,u)\ du$$

□

Ejemplo Sea $F(x,y,z) = -z\hat{\imath} + xy\hat{k}$. Hallar G tal que rot F=G

Solución En este caso se tiene

$$F(x,y,z) = (-z,0,xy) = (P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)) \ \Rightarrow\ P(x,y,z) = -z$$

$$F(x,y,z) = (-z,0,xy) = (P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)) \ \Rightarrow\ Q(x,y,z) = 0$$

$$F(x,y,z) = (-z,0,xy) = (P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)) \ \Rightarrow\ R(x,y,z) = xy$$

de esta manera

$$P(x,y,z) = -z \ \Rightarrow \ P(0,y,u) = -u$$
$$Q(x,y,z) = 0 \ \Rightarrow \ Q(t,y,z) = 0$$
$$R(x,y,z) = xy \ \Rightarrow \ R(t,y,z) = ty$$

por lo tanto si $x_0 = z_0 = 0$

$$L(x,y,z) = 0$$
$$M(x,y,z) = \int_0^x ty\ dt - \int_0^z -u\ du = \frac{yt^2}{2} \,|_0^x + \frac{u^2}{2} \,|_0^z = \frac{yx^2}{2} + \frac{z^2}{2}$$
$$N(x,y,z) = -\int_0^x 0\ du = 0$$

de esta manera

$$G(x,y,z) = \left(0, \frac{yx^2}{2} + \frac{z^2}{2}, 0\right)$$

Ejemplo Sea $F(x,y,z) = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 3\hat{k}$. Hallar G tal que rot F=G

Solución En este caso se tiene

$$F(x,y,z) = (2,1,3) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) \ \Rightarrow \ P(x,y,z) = 2$$
$$F(x,y,z) = (2,1,3) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) \ \Rightarrow \ Q(x,y,z) = 1$$
$$F(x,y,z) = (2,1,3) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) \ \Rightarrow \ R(x,y,z) = 3$$

de esta manera

$$P(x,y,z) = 2 \ \Rightarrow \ P(0,y,u) = 2$$
$$Q(x,y,z) = 1 \ \Rightarrow \ Q(t,y,z) = 1$$
$$R(x,y,z) = 3 \ \Rightarrow \ R(t,y,z) = 3$$

por lo tanto si $x_0 = z_0 = 0$

$$L(x,y,z) = 0$$
$$M(x,y,z) = \int_0^x 3\ dt - \int_0^z 2\ du = 3t\,|_0^x - 2t\,|_0^z = 3x - 2z$$
$$N(x,y,z) = -\int_0^x\ du = -x$$

de esta manera

$$G(x,y,z) = (0, 3x - 2z, -x)$$

Supongamos todos los campos vectoriales que se consideran derivables con continuidad. Sea $H = F + G$, donde F es solenoidal ($div\ F = 0$) y G es irrotacional.
Existe entonces un campo vectroial u tal que $F = rot\ u$ y un campo escalar φ tal que $G = \nabla\varphi$ en S.

Ejercicio Demostrar que u y φ satisfacen en S la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales

$$a)\ \ \nabla^2\varphi = div\ H \qquad b)\ \ grad\ (div\ u) - \nabla^2 u = rot\ F$$

Demostración. tenemos que

$$div\ H = div\ F + G = div\ F + div\ G = div\ G = div\ (\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi$$

por otro lado

$$rot\ H = rot\ F + rot\ G = rot\ F = rot\ (rot\ u) = grad\ (div\ u) - \nabla^2 u$$

□

Ejercicio Hallar los campos F y G donde F es solenoidal (div F=0) y G es un campo gradiente de modo que se verifique

$$H = F + G$$

para

$$a)\ \ H(x,y,z) = (x^2y, y^2z, z^2x)$$

Solución para el inciso a) como

$$div\ H = div\ F + G = div\ F + div\ G = div\ G$$

entonces $H = \nabla\varphi$ por lo tanto

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = x^2y, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = y^2z, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = z^2x$$

integrando

$$\varphi(x,y,z) = \int x^2y + A(y,z), \qquad \varphi(x,y,z) = \int y^2z + B(x,z), \qquad \varphi(x,y,z) = \int z^2x + C(x,y)$$

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x^3y}{3} + A(y,z), \qquad \varphi(x,y,z) = \frac{y^3z}{3} + B(x,z), \qquad \varphi(x,y,z) = \frac{z^3x}{3} + C(x,y)$$

donde

$$A(y,z) = \frac{y^3z}{3} + \frac{z^3x}{3}, \quad B(x,z) = \frac{x^3y}{3} + \frac{z^3x}{3}, \quad C(x,y) = \frac{x^3y}{3} + \frac{y^3z}{3}$$

de esta manera

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x^3y}{3} + \frac{y^3z}{3} + \frac{z^3x}{3}$$

por lo tanto

$$G = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \left(x^2y + \frac{z^3}{3}, y^2z + \frac{x^3}{3}, z^2x + \frac{y^3}{3}\right)$$

de la ecuación $H = F + G$ se tiene

$$F(x,y,z) = \left(-\frac{z^3}{3}, -\frac{x^3}{3}, -\frac{y^3}{3}\right)$$