Sumas Inferiores y Sumas Superiores

Denotaremos por $\underline{S}(f)$ al conjunto de todas las sumas inferiores de una función f (Definida sobre el rectángulo R) y como $\overline{S}(f)$ al conjunto de todas las sumas inferiores es decir

$$\underline{S}(f) = \{\underline{S}(f, P) \mid P \in P_R\}$$

$$\overline{S}(f) = \{\overline{S}(f, P) \mid P \in P_R\}$$

Definición 1. *Al supremo del conjunto $\underline{S}(f)$ lo llamamos integral inferior de f sobre R y se puede denotar $\underline{\int}_R (f)$. Y al ínfimo del conjunto $\underline{S}(f)$ lo llamamos integral superior de f sobre R y podemos denotar $\overline{\int}_R (f)$*

Definición 2. *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada sobre el rectángulo R. Decimos que f es integrable según Riemann sobre R si se tiene que la integral inferior y la integral superior de f sobre R son iguales. Es decir*

$$\underline{\int}_R (f) = \overline{\int}_R (f)$$

En este caso, a este número lo llamaremos la integral de f y lo denotarremos por $\int\int_R f$

Lema 1. *Para cada $\epsilon > 0$ existe una partición P de R tal que*

$$0 \le \underline{\int}_R f - \underline{S}(f, p) < \epsilon \quad y \quad 0 \le \overline{S}(f, p) - \overline{\int}_R f < \epsilon$$

Demostración. Como

$$\underline{\int}_R (f) = \sup\{\underline{S}(f)\} \ \exists \ P_1 \in P_R \ \ tal \ \ que$$

$$\underline{\int}_R (f) - \sup\{\underline{S}(f)\} < \epsilon$$

$$\overline{\int}_R (f) = \text{ínf}\{\overline{S}(f)\} \ \exists \ P_2 \in P_R \ \ tal \ \ que$$

$$\text{ínf}\{\overline{S}(f)\} - \underline{\int}_R (f) < \epsilon$$

Sea $P = P_1 \bigcup P_2$ se tiene entonces que

$$\overline{S}(f, P) \le \overline{S}(f, P_2) \qquad \underline{S}(f, P_1) \le \underline{S}(f, P)$$

por lo tanto

$$0 \le \underline{\int}_R f - \underline{S}(f, P) \le \underline{\int}_R f - \underline{S}(f, P_1) < \epsilon$$

$$0 \le \overline{S}(f, P) - \overline{\int}_R f \le \underline{S}(f, P_2) - \underline{\int}_R f < \epsilon$$

□

Teorema 1. *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada sobre el rectángulo R. Se tiene que f es integrable sobre R si y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe una P partición de R tal que*

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon$$

Demostración. $\Rightarrow$)
Sea $\epsilon > 0$ como f es integrable $\underline{\int}_R f = \overline{\int}_R f = I$ y por las propiedades del supremo sabemos que para $\frac{\epsilon}{2} > 0$ $\exists$ una $P\prime$ partición de R tal que

$$I - \frac{\epsilon}{2} \leq \underline{S}(f, P\prime) \leq I.$$

Por otra parte de las propiedades del ínfimo sabemos que $\exists$ una $Q\prime$ partición de R tal que

$$I \leq \overline{S}(f, Q\prime) \leq I + \frac{\epsilon}{2}.$$

Si hacemos $P = P\prime \bigcup Q\prime$ tenemos que

$$\underline{S}(f, P\prime) \leq \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f, P\prime)$$

$\therefore$

$$I - \frac{\epsilon}{2} \leq \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P) \leq I + \frac{\epsilon}{2}$$

$\therefore$

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) \leq I + \frac{\epsilon}{2} - (I - \frac{\epsilon}{2}) = \epsilon.$$

$\therefore$ f es integrable
$\Leftarrow$)
Tenemos que probar que la función es integrable es decir $\underline{\int}_R f = \overline{\int}_R f$ o equivalentemente $\underline{\int}_R f - \overline{\int}_R f = 0$ sabemos que

$$\underline{\int}_R f \leq \overline{\int}_R f \Rightarrow 0 \leq \overline{\int}_R f - \underline{\int}_R f.$$

Sea $\epsilon > 0$ por hipótesis, existe P partición de R tal que $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon$ por otra parte se tiene que:

$$\underline{S}(f,P) \leq \underline{\int}_R f \leq \overline{\int}_R f \leq \overline{S}(f,P)$$

$\therefore$

$$0 \leq \overline{\int}_R f - \underline{\int}_R f \leq \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon$$

$\therefore$

$$\overline{\int}_R f = \underline{\int}_R f$$

$\therefore$ f es integrable

$\square$

Teorema 2. *Si una función f es continua en un rectángulo $Q = [a, b] \times [c, d]$ entonces f es integrable en Q.*

Demostración. Tenemos que

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\Delta(R_{ij}) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\Delta(R_{ij}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(M_{ij} - m_{ij})\Delta(R_{ij})$$

$$< \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\epsilon}{A(R)}\Delta(R_{ij}) = \frac{\epsilon}{A(R)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Delta(R_{ij}) = \frac{\epsilon}{A(R)}A(R)$$

La desigualdad se justifica de la siguiente forma:
Como f es continua en un conjunto cerrado y acotado entonces f es uniformemente continua $\therefore$ para

$$\overline{x_{ij}},\quad \overline{y_{ij}} \in R_{ij} \quad con \quad \|x_{ij} - y_{ij}\| < \delta \Rightarrow |f(x_{ij}) - f(y_{ij})| < \frac{\epsilon}{A(R)}$$

□

Ejemplo Si f es una función integrable sobre R y $R_k \subset R$ entonces f es integrable sobre R_k

Demostración. Com f es integrable sobre R existe una partición P de R tal que

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon$$

Sean P_1 los $R_{i,j} \in P$ tal que $R_{ij} \subset R_k$ y sea P_2 los R_{ij} restantes, tenemos entonces que

$$\overline{S}(f, P) = \overline{S}(f, P_1) + \overline{S}(f, P_2)$$

$$\underline{S}(f, P) = \underline{S}(f, P_1) + \underline{S}(f, P_2)$$

por lo tanto

$$\overline{S}(f, P_1) - \underline{S}(f, P_1) + \overline{S}(f, P_2) - \underline{S}(f, P_2) = \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon$$

como cada término de la suma es positivo se tiene que

$$\overline{S}(f, P_1) - \underline{S}(f, P_1) < \epsilon$$

y tenemos una partición de $R_k \subset R$ donde f es integrable □

Teorema 3. *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrable sobre R. Entonces existe $x_0 \in$ $int(R)$ tal que f es continua en x_0*

Demostración. Como f es integrable sobre R existe una partición P de R tal que

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(M_{ij} - m_{ij})A(R) < A(R)$$

como los sumandos son términos no negativos, existen subíndices ij_1 tal que $M_{ij_1} - m_{ij_1} < 1$
pues de lo contrario si

$$M_{ij} - m_{ij} \geq 1 \ \forall \ i,j \ \Rightarrow \ (M_{ij} - m_{ij})A(R_{ij}) \geq A(R_{ij}) \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(M_{ij} - m_{ij})A(R_{ij}) \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(Rij) = A(R)$$

lo cual contradice nuestra suposición.
Ahora bien sea R_{ij_1} el subrectángulo de la partición P que cumple $M_{ij_1} - m_{ij_1} < 1$ donde $R_{ij_1} \subset R$.
Como f es integrable sobre R y $R_{ij_1} \subset R$ entonces f es integrable en R_{ij_1}, existe entonces una partición P_1 de R_{ij_1} tal que

$$\overline{S}(f, P_1) - \underline{S}(f, P_1) = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{m_1}(M_{ij_1} - m_{ij_1})A(R_{ij_1}) < \frac{A(R_{ij_1})}{2}$$

Podemos asegurar que existe un subrectángulo R_{ij_2} inducido por P_1 con la propiedad $M_{ij_2} - m_{ij_2} < \dfrac{1}{2}$
donde

$$M_{ij_2} = \sup\{f(x) \mid x \in R_{ij_2}\} \quad m_{ij_2} = \inf\{f(x) \mid x \in R_{ij_2}\}$$

y además $R_{ij_2} \subset R_{ij_1}$.
Siguiendo este procedimiento, obtenemos una sucesión de rectángulos $\{R_{ij_k}\}$ anidados en $\mathbb{R}^2$ con la propiedad

$$M_{ij_k} - m_{ij_k} < \frac{1}{k} \quad donde \quad M_{ij_k} = \sup\{f(x) \mid x \in R_{ij_k}\} \quad m_{ij_k} = \inf\{f(x) \mid x \in R_{ij_k}\} \ \ R_{ij_{k+1}} \subset R_{ij_k}$$

Sabemos que

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} R_{ij_k} \neq \emptyset$$

Ahora, si

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} R_{ij_k}$$

vamos a comprobar que f es continua en x_0. Sea $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{N} < \epsilon$. Como $x_0 \in R_{ij_{N+1}} \subset R_{ij_N}$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(x_0) \subset R_{ij_N}$$

de tal forma que

$$m_{ij_N} \leq f(x) \leq M_{ij_N} \quad \forall \ \ x \in B_\delta(x_0)$$

como $M_{ij_N} - m_{ij_N} < \dfrac{1}{N}$ se tiene que

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{N} < \epsilon \quad \forall \ \ x \in B_\delta(x_0)$$

por lo tanto f es continua en x_0 □

Ejercicio Sea $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrable sobre R tal que $f(x) \geq 0\ \forall\ x \in\ R$. Si f es continua en $x_0 \in R$ y $f(x_0) > 0$ entonces

$$\int_R f > 0$$

Solución Si f es continua en $x_0 \in R$ y $f(x_0) > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$$

por lo tanto

$$\frac{f(x_0)}{2} < f(x) \quad \forall\ x \in B_\delta(x_0)$$

Sea $P \in P_R$ una partición de P y sea $R_1 \subset R$ tal que $R_1 \subset B_\delta(x_0)$ se tiene entonces

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}A(R_{ij}) = m_{11}A(R_{11}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}A(R_{ij}) \geq \frac{f(x_0)}{2} \cdot A(R_{11}) + 0 > 0$$

por lo tanto

$$0 < \underline{S}(f, P) \leq \int_R f$$