Vector Tangente y Vector Normal

Definición 1. *Dada una superficie $S = f(D)$ descrita por la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*

$$f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

de clase c^1 con $(u,v) \in D$ y dado un punto $(u_0,v_0) \in D$ definimos los vectores

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$$

donde dichos vectores son tangentes a la superficie en el punto dado $(x_0,y_0,z_0) = f(u_0,v_0)$

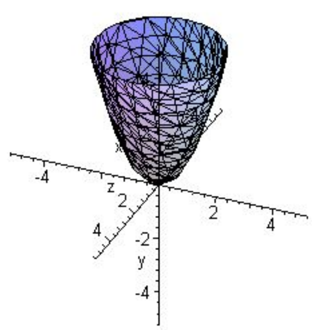
Definición 2. *Si llamo $T_u = \dfrac{\partial f}{\partial u}$ y $T_v = \dfrac{\partial f}{\partial v}$ al ser vectores linealmente independientes con ellos puedo generar el vector $T_u \times T_v$ el cual es normal a la superfície en un punto dado.*

y con estos elementos puedo determinar un plano tangente a una superfície dada en un punto dado.

Definición 3. *Una superfície es suave si en cada punto de ella puedo definir un plano tangente, es decir Una superfície es suave en $f(u_0,v_0)$ si $T_u \times T_v \neq 0$ en (u_0,v_0), y la superfície es suave si es suave en todos los puntos $f(u_0,v_0) \in S$*

En caso de que $T_u \times T_v = 0$ para algun o algunos puntos de una superfície, entonces ahí no se puede definir un plano tangente.

Ejemplo Vamos a considerar la superfície de un cono y en ella vamos a comprobar que no se puede definir un plano tangente en el origen



Una ecuación parametrica para un cono es $x = u\cos(v)$, $y = u\sin(v)$, $z = u$ con $u \geq 0$, tenemos entonces que

$$T_u = (\cos(v), \sin(v), 1) \qquad T_v = (-u\sin(v), u\cos(v), 0)$$

$\therefore$

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos(v) & \sin(v) & 1 \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 0 \end{vmatrix} = (-u\cos(v), -u\sin(v), u)$$

En nuestro ejemplo si $(u, v) = (0, 0)$ entonces $T_u \times T_v = (0, 0, 0)$ por lo tanto en el origen de nuestra superfície (cono) no se puede definir un plano tangente

Plano Tangente

Si una superfície parametrizada $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es suave en $\phi(u_0, v_0)$, esto es $T_u \times T_v \neq \overline{0}$ en (u_0, v_0) definimos el plano tangente a la superfície en $\phi(u_0, v_0)$ como el plano determinado por los vectores T_u, T_v así $n = T_u \times T_v$ es normal a la superfície y una ecuación del plano tangente esta dada por

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot n = 0$$

dond n se evalua en (u_0, v_0) y (x_0, y_0, z_0) es un punto sobre la superfície.

Ejemplo Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $x = u\cos(v)$, $y = u\sin(v)$, $z = u^2 + v^2$

a)¿Donde existe el plano tangente?

b)Halle el plano tengente para $\phi(1, 0)$

Para a) tenemos que

$$T_u = (\cos(v), \sin(v), 2u) \qquad T_v = (-u\sin(v), u\cos(v), 2v)$$

$\therefore$

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos(v) & \sin(v) & 2u \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 2v \end{vmatrix} = (2v\sin(v) - 2u^2\cos(v), -2v\cos(v) - 2u^2\sin(v), u)$$

$\therefore T_u \times T_v \neq \overline{0}$ para $(u, v) \neq (0, 0)$ $\therefore$ para $(u, v) \neq (0, 0)$ $\exists$ un plano tangente

Para b) tenemos que

$\phi(1, 0) = (1\cos(0), 1\sin(0), 1^2 + 0^2) = (1, 0, 1)$ por otro lado $T_u \times T_v$ evaluados en $(1, 0, 1)$ nos da $n = (2(0)\sin(0) - 2(1)^2\cos(0), -2(0)\cos(0) - 2(1)^2\sin(0), 1) = (-2, 0, 1)$ $\therefore$ una ecuación del plano tangente en $(1, 0, 1)$ es:

$$(-2, 0, 1) \cdot ((x, y, z) - (1, 0, 1)) = (-2, 0, 1) \cdot (x - 1, y, z - 1) = -2(x - 1)(z - 1)$$

$$\Rightarrow -2x + 2 + z - 1 = 0 \Rightarrow z = 2x - 1$$

Ejemplo Supóngase que una superfície S es la gráfica de una función diferenciable $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. una forma parametrica de ella sería $f(x, y) = (x, y, F(x, y))$ por lo tanto

$$T_x = \left(1, 0, \frac{\partial F}{\partial x}\right) \qquad T_y = \left(0, 1, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

.
Los cuales son siempre linealmente independientes, por lo tanto dado un punto $(u_0, v_0) \in S$ podemos definir un plano tangente el cual tendría como vector normal

$$n = T_x \times T_y = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial F}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial y}, 1\right)$$

por lo tanto una la ecuación del plano tangente a la superficie S en un punto dado $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$ es:

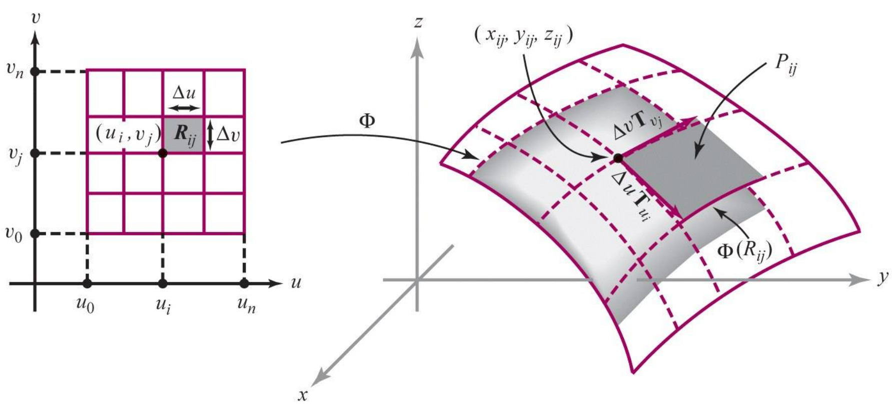
$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \left(-\frac{\partial F}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial y}, 1\right) = 0$$

Área de una Superfície Paramétrica

Supóngase que una superfície S es la gráfica de una función diferenciable $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. $z = F(x, y)$, y sea

$$P = \{R_{ij} \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$$

una particion de la región D en rectángulos $R_{ij} = [u_i, u_i + \triangle_{u_i}] \times [v_j, v_j + \triangle_{v_j}]$



Sea R_{ij} el rectángulo en D con vértices (u_i, v_j) $(u_i + \triangle_{u_i}, v_j)$, $(u_i, v_j + \triangle_{v_j})$, $(u_i + \triangle_{u_i}, v_j + \triangle_{v_j})$ estos vértices bajo f caen en un rectángulo curvo
$f(u_i, v_j)$, $f(u_i + \triangle_{u_i}, v_j)$, $f(u_i, v_j + \triangle_{v_j})$, $f(u_i + \triangle_{u_i}, v_j + \triangle_{v_j})$
si f es suave entonces

$$f(u_i + \triangle_{u_i}, v_j) - f(u_i, v_j) \approx T_u(u_i, v_j)\triangle_{u_i}$$

$$f(u_i, v_j + \triangle_{v_j}) - f(u_i, v_j) \approx T_v(u_i, v_j)\triangle_{v_j}$$

por lo tanto el área del paralelogramo generado por los vectores $T_u(u_i, v_j)\triangle_{u_i}$ y $T_v(u_i, v_j)\triangle_{v_j}$ esta dada por

$$\left\|T_u(u_i, v_j)\triangle_{u_i} \times T_v(u_i, v_j)\triangle_{v_j}\right\| = \left\|T_u(u_i, v_j) \times T_v(u_i, v_j)\right\| \triangle_{u_i}\triangle_{v_j}$$

$\therefore$ Si consideramos la suma de todas las áreas dada una particion de la superfície nos aproximaremos a su área total, tenemos entonces que

$$\acute{a}rea(S) \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \|T_u(u_i, v_j) \times T_v(u_i, v_j)\| \triangle_{u_i}\triangle_{v_j}$$

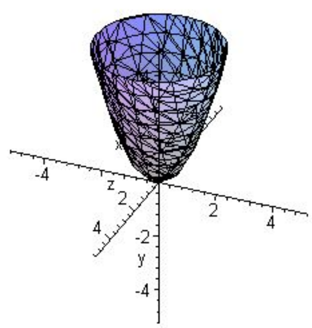
Considerando una partición suficientemente grande tenemos que:

$$\acute{a}rea(S) = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \|T_u(u_i, v_j) \times T_v(u_i, v_j)\| \triangle_{u_i}\triangle_{v_j} = \int\int_D \|T_u \times T_v\| du\ dv$$

Ejemplo Calcule el área de la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que esta comprendida entre los planos $z = 0$, $z = 1$

sol.-

La intersección del paraboloide con el plano $z = 0$ es el punto $(0, 0)$ y con el plano $z = 1$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ por lo que la región limitada por la proyección de dicha circunferencia sobre el plano XY es $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$



Podemos entonces considerar la siguiente parametrización

$$r(x, y) = \{x, y, x^2 + y^2\}$$

de esta manera $S = r(D)$, siendo S la superfície descrita se tiene que

$$r_x = \frac{\partial r}{\partial x} = (1, 0, 2x) \quad r_x = \frac{\partial r}{\partial y} = (0, 1, 2y) \quad \therefore \quad n(x, y) = r_x \times r_y = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

.
$\therefore$ el área de la superfície sera

$$a(s)=\int\int_D \|r_x\times r_y\|\,dxdy=\int\int_D\sqrt{(-2x)^2+(-2y)^2+1}dxdy=\int\int_D\sqrt{4x^2+4y^2+1}dxdy$$

$$\underbrace{=}_{polares}\int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{4r^2+1}rd\theta dr=2\pi\int_0^1\sqrt{4r^2+1}rdr\underbrace{=}_{\substack{u=4r^2+1\\du=8r}}=\frac{2\pi}{8}\int_1^5\sqrt{u}du=\frac{2\pi}{8}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^5\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}5^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\right]=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$