Independencia de la parametrización

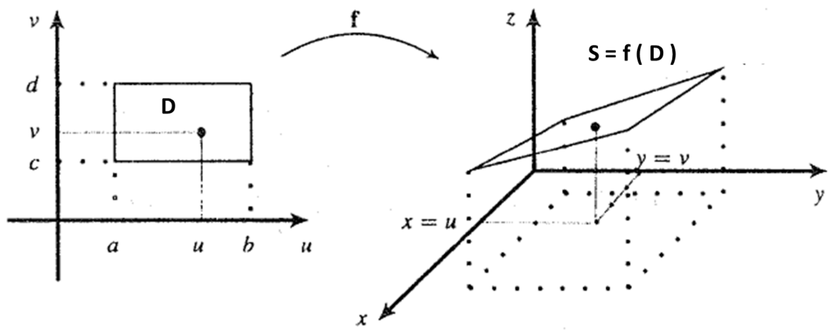
Definición 1. *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $S = f(D)$ una superficie parametrizada , y sea $\varphi : \overline{D} \to D$ una función biyectiva definida en $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$ la cual es tipo I y II a la vez, de clase c^1.*
Decimos que la función

$$f \circ g : \overline{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

es una ***reparametrización*** *de S*

Ejemplo Sea $f : [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la función dada por

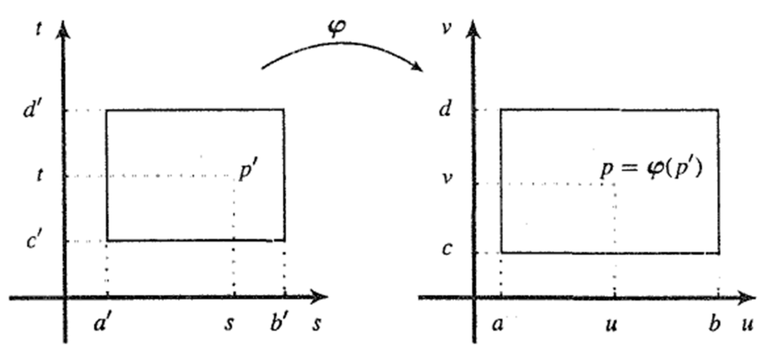
$$f(u,v) = (u, v, \gamma + \alpha u + \beta v)$$



que representa un plano en $\mathbb{R}^3$
Sea $\varphi : [a',b'] \times [c',d'] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función dada por

$$\varphi(s,t) = \left(\frac{b-a}{b'-a'}(s-a') + a, \frac{d-c}{d'-c'}(t-c') + c \right)$$

esta función manda el rectángulo $[a',b'] \times [c',d']$ en el rectángulo $[a,b] \times [c,d]$ de manera biyectiva



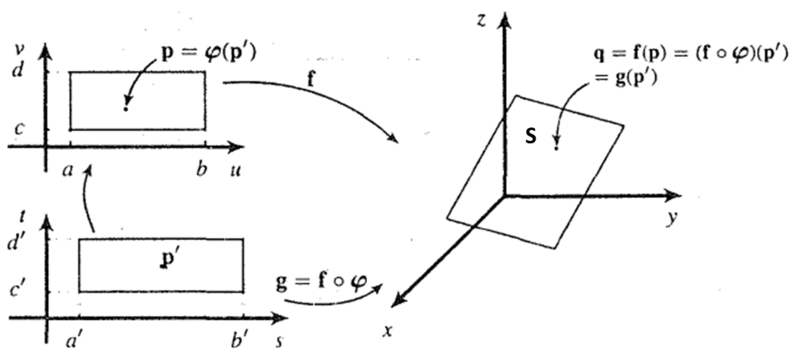
La función $g : f \circ \varphi : [a', b'] \times [c', d'] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$g(s,t) = (f \circ \varphi)(s,t) = f(\varphi(s,t)) = f\left(\frac{b-a}{b'-a'}(s-a') + a, \frac{d-c}{d'-c'}(t-c') + c\right) =$$

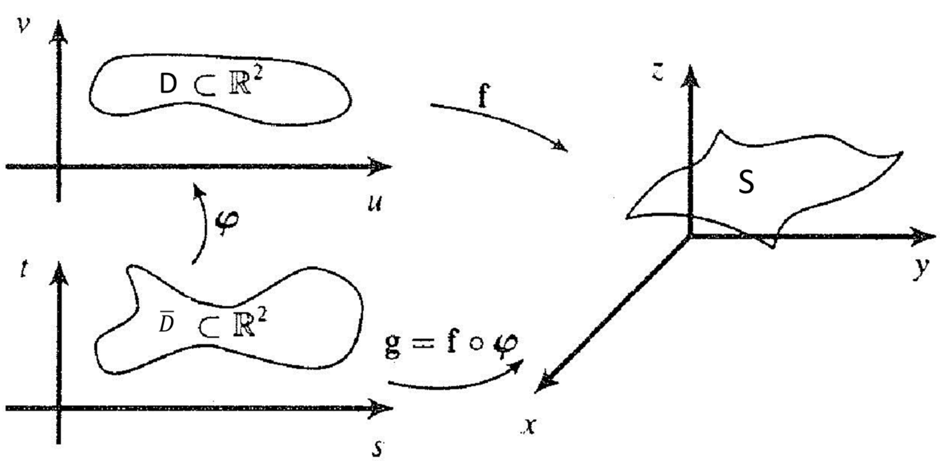
$$\left(\frac{b-a}{b'-a'}(s-a') + a, \frac{d-c}{d'-c'}(t-c') + c, \left(\frac{b-a}{b'-a'}(s-a') + a\right)\alpha + \left(\frac{d-c}{d'-c'}(t-c') + c\right) + \gamma\right)$$

tiene la misma imagen que f, es inyectiva de clase c^1. Se trata entonces de una función que parametriza a la superficie S, es decir

$$S = f([a,b] \times [c,d]) = g([a',b'] \times [c',d'])$$



Si $g(s,t) = (f \circ \varphi)(s,t)$ entonces g es una reparametrización de f



en tal caso se tiene que $\varphi(s,t) = (\varphi_1(s,t), \varphi_2(s,t))$ en donde $u = \varphi_1(s,t)$ y $v = \varphi_2(s,t)$ $\therefore$ se tiene que $g'(s,t) = f'(\varphi(s,t)) \cdot \varphi'(s,t)$ es decir

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) = \frac{\varphi_1}{\partial s}(s,t) \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(s,t)) + \frac{\varphi_2}{\partial s}(s,t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(s,t))$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(s,t)=\frac{\varphi_1}{\partial t}(s,t)\cdot\frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(s,t))+\frac{\varphi_2}{\partial t}(s,t)\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(s,t))$$

$\therefore$

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s,t)\times\frac{\partial g}{\partial t}(s,t)=\frac{\varphi_1}{\partial s}(s,t)\cdot\frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(s,t))+\frac{\varphi_2}{\partial s}(s,t)\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(s,t))\times\frac{\varphi_1}{\partial t}(s,t)\cdot\frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(s,t))+\frac{\varphi_2}{\partial t}(s,t)\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(s,t))$$

$$\underbrace{=}_{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\times\gamma\vec{a}+\delta\vec{b}=(\alpha\gamma-\beta\delta)(\vec{a}\times\vec{b})}\left(\frac{\varphi_1}{\partial s}(s,t)\cdot\frac{\varphi_2}{\partial t}(s,t)-\frac{\varphi_1}{\partial t}(s,t)\cdot\frac{\varphi_2}{\partial s}(s,t)\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(s,t))\times\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(s,t))\right)$$

donde

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s,t)\times\frac{\partial g}{\partial t}(s,t)=N_g \qquad \left(\frac{\varphi_1}{\partial s}(s,t)\cdot\frac{\varphi_2}{\partial t}(s,t)-\frac{\varphi_1}{\partial t}(s,t)\cdot\frac{\varphi_2}{\partial s}(s,t)\right)=J_g(s,t)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(s,t))\times\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(s,t))\right)=N_f$$

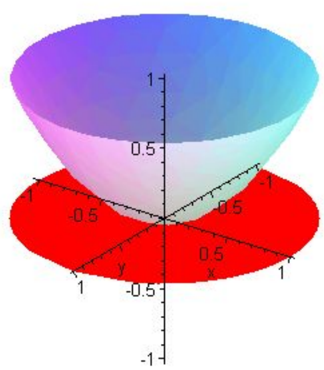
$\therefore$

$$N_g=J_g(s,t)N_f(u,v)$$

$$a(s)=\int\int_D\|N_f(u,v)\|\,dudv\underbrace{=}_{(u,v)=\varphi(s,t)}\int\int_{\widetilde{D}}\|N_f(\varphi(s,t))\|\left|\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)}\right|$$

$\therefore$ el área de la superfície no depende de la parametrización

Ejemplo.-Vamos a calcular el área de la superfície $z=x^2+y^2$ sobre la región $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leq 1\}$



Para ello parametrizamos la superfície $z = x^2 + y^2$ de la siguiente manera $r(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ y por lo tanto

$$\frac{\partial r}{\partial x} = (1, 0, 2x) \quad \frac{\partial r}{\partial y} = (0, 1, 2y) \quad \therefore \quad \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 1)$$

$\therefore$ el área es

$$\int\int_D \left\| \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} \right\| dA = \int\int_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dudv \underbrace{=}_{Polares} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1} rdrd\theta$$

$$\underbrace{=}_{\substack{u=4r^2+1 \quad du=8r \\ r=0\to u=1 \quad r=1\to u=5}} \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \int_1^5 \sqrt{u} dud\theta = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \left|_0^5 \right.\right) d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} \left(5^{\frac{3}{2}} - 1 \right) d\theta = \frac{\pi}{6} \left(5^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$$

Ahora vamos a dar una reparametrización de D de la siguiente forma, proponemos $\widetilde{D} = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 | s^2 + t^2 \leq \frac{1}{2}\}$ de esta manera si

$$s^2 + t^2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2s^2 + 2t^2 \leq 1 \Rightarrow s^2 + 2st + t^2 + s^2 - 2st + t^2 \leq 1 \Rightarrow (s + t)^2 + (s - t)^2 \leq 1$$

$\therefore$ podemos tomar $u = s + t$ y $v = (s - t)$ y por tanto nuestra reparametrización quedaría

$$g(s, t) = (s + t, s - t, 2s^2 + 2t^2)$$

donde

$$\frac{\partial g}{\partial s} = (1, 1, 4s) \quad \frac{\partial g}{\partial t} = (1, -1, 4t) \quad \therefore \quad \frac{\partial g}{\partial s} \times \frac{\partial g}{\partial t} = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 1 & 1 & 4s \\ 1 & -1 & 4t \end{vmatrix} = (4t + 4s, 4s - 4t, -2)$$

$\therefore$ el área es

$$\int\int_D \left\| \frac{\partial g}{\partial s} \times \frac{\partial g}{\partial t} \right\| dA = \int\int_D \sqrt{(4s + 4t)^2 + (4s - 4t)^2 + (-2)^2} dsdt = \int\int_D \sqrt{32t^2 + 32s^2 + 4} dsdt$$

$$\underbrace{=}_{Polares} 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{8r^2 + 1} rdrd\theta$$

$$\underbrace{=}_{\substack{u=8r^2+1 \quad du=16r \\ r=0\to u=1 \quad r=\frac{1}{\sqrt{2}}\to u=5}} \frac{2}{8} \int_0^{2\pi} \int_1^5 \sqrt{u} dud\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \left|_0^5 \right.\right) d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} \left(5^{\frac{3}{2}} - 1 \right) d\theta = \frac{\pi}{6} \left(5^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$$