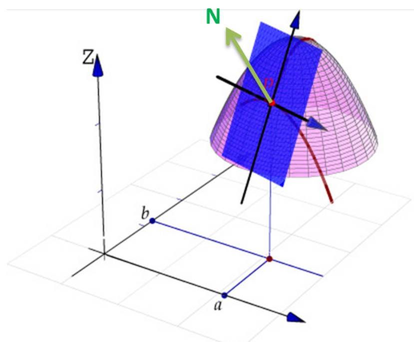
Superficies Orientables

Definición 1. *Sea S una superficie suave imagen de una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.*
Se dice que S tiene orientación positiva si en cada uno de sus puntos el vector

$$\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}, \qquad S$$

estan de lados distintos del plano tangente a S en el punto P

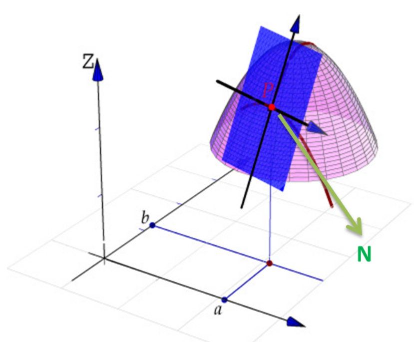


En tal caso el exterior de S está hacia donde apunta el vector N y el interior está hacia donde apunta -N

Definición 2. *Sea S una superficie suave imagen de una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.*
Se dice que S tiene orientación negativa si en cada uno de sus puntos el vector

$$\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}, \qquad S$$

estan del mismo lado del plano tangente a S en el punto P



En tal caso el exterior de S está hacia donde apunta el vector -N y el interior está hacia donde apunta N

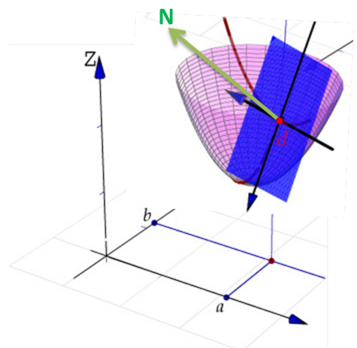
Ejemplo Sea la superficie $z = x^2 + y^2$ desde $z = 0,\ z = 10$. Una parametrización de esta superficie es:

$$f(u, v) = (u, v, u^2 + v^2) \qquad D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 10\}$$

en este caso se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial u} = (1,0,2u) \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial v} = (0,1,2v) \quad \therefore \quad \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} = (-2u,-2v,1)$$

Tomando $N_{(1,1)} = (-2,-2,1)$ que apunta hacia adentro en el punto P, por tanto la superficie y el vector normal en el punto P están en el mismo lado con respecto a el plano tangente y por lo tanto esta superficie tiene orientación negativa en P.



Considere ahora $\phi : \overline{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\phi(s,t) = (s+t, s-t, 2s^2+2t^2) \quad \overline{D} = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2+t^2 \leq 5\}$$

si consideramos

$$G : \overline{D} \to D \quad G(s,t) = (s+t, s-t)$$

entonces $\phi = f \circ G$ es una reparametrización de $z = x^2+y^2$ y en tal caso

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = (1,1,4s) \quad y \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = (1,-1,4t) \quad \therefore \quad \frac{\partial \phi}{\partial s} \times \frac{\partial \phi}{\partial t} = (4s+4t, 4s-4t, -2)$$

Tomando $N_{(1,0)} = (4,4,-2) = -2(-2,-2,1)$ que apunta hacia el exterior en el punto P, por tanto la superficie y el vector normal en el punto P están en lados contrarios con respecto a el plano tangente y por lo tanto esta superficie tiene orientación positiva en P.

En el ejemplo anterior la orientación de la superficie si dependio de la parametrización
Sea $g = f \circ \varphi : \overline{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de una superficie S, donde $\varphi : \overline{D} \to D$ dada por (φ_1, φ_2) es una biyección de clase c^1 cuyo jacobiano es

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)} \neq 0 \quad \forall\ (s,t) \in \overline{D}$$

Ya se ha probado que

$$N_g(s,t) = \frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)} N_f(u,v)$$

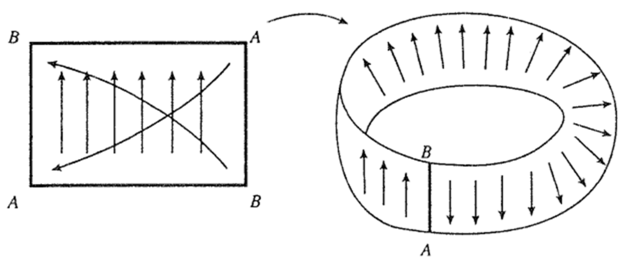
por lo tanto
Si

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)} > 0$$

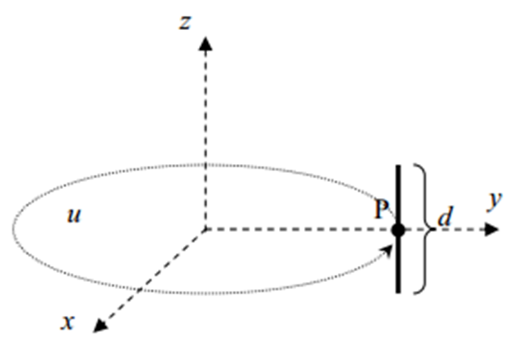
entonces $N_g(s,t)$ y $N_f(u,v)$ estaran en la misma dirección y diremos que g es una reparametrización de S que conserva la orientación
Si
$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)}<0$$
entonces $N_g(s,t)$ y $-N_f(u,v)$ estaran en la misma dirección y diremos que g es una reparametrización de S que invierte la orientación

Superficies No Orientadas

Un ejemplo de una superficie no orientada lo encontramos en la banda de Moebius



vamos a dar una parametrización y para ello usaremos la fórmula que parametriza una superficie de revolución para una curva
$$\gamma(t)=(0,y(t),z(t))$$
en el plano YZ dada por
$$(y(t)\cos(\theta),y(t)\operatorname{sen}(\theta),z(t))$$
Tomamos como generatriz un segmento d de longitud v, en el plano YZ



este segmento debera girar un ángulo π y para ellos usamos la parametrización
$$\left(0,1-v\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right),v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\quad v\in[-1,1],\quad u\in[0,2\pi]$$
aplicando la fórmula obtenemos
$$f(u,v)=\left(\left(1-v\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u),\left(1-v\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\operatorname{sen}(u),v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\quad v\in[-1,1],\quad u\in[0,2\pi]$$

donde

$$f(A) = f(0, -1) = (1, 0, -1) = f(2\pi, 1) \quad f(B) = (0, 1) = (1, 0, 1) = f(2\pi, -1)$$

notamos la inversión de los extremos