La integral de superficie puede considerarse como el equivalente en dos dimensiones a la integral de línea siendo la región de integración una superficie en lugar de una curva. El integrando será un campo escalar o un campo vectorial

Superfícies

Las superficies serán todos aquellos conjuntos que se pueden ver como la imagen de una función derivable definida sobre ciertos subconjuntos del plano.

Definición 1. *Decimos que $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie si existen $f = (f_1, f_2, f_3) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase c^1 donde D es una región tipo I o tipo II, tales que $S = f(D)$*

Superfícies Parametricas

Dada una región $D \subseteq \mathbb{R}^2$ se dice de tipo I si ésta puede escribirse como

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | a \leq u \leq b \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Y se dice de tipo II si ésta puede escribirse como

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | c \leq v \leq d \quad \psi_1(u) \leq v \leq \psi_2(u)\}.$$

Para algunas funciones continuas $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$

Definición 2. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ una región del tipo I ó II en $\mathbb{R}^2$ y sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por*

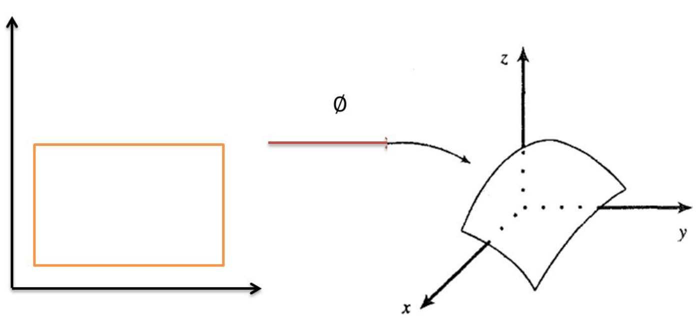
$$f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

una función inyectiva de clase c^1 (es decir sus funciones componentes $x, y, z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son de clase c^1

A la función $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ se le llama parametrización de la superfície.Y es es la representación paramétrica o vectorial por medio de tres ecuaciones que expresan x, y, z en función de dos parámetros u y v.

Parametrización de Superfícies

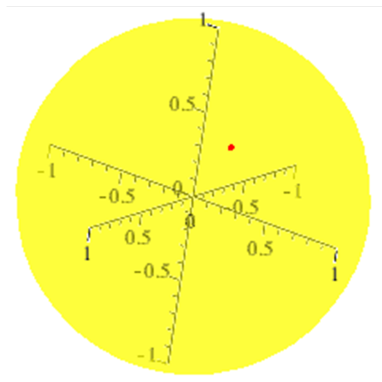
Sea D una región en el plano u, v y f una función vectorial continua definida $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

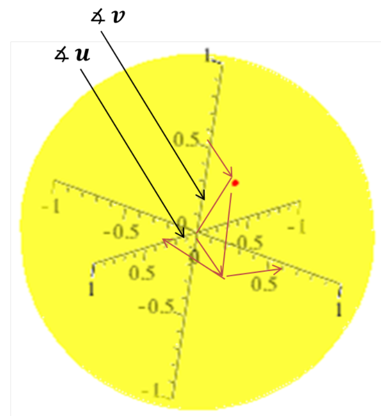


cuando (u, v) toman todos los valores posibles de D, f dibuja una superficie en $\mathbb{R}^3$. Cuyas ecuaciones parametricas son $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$

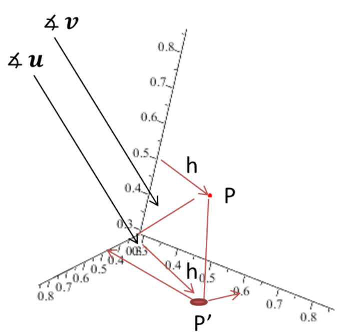
La parametrización de una superficie puede obtenerse de diferentes formas, a continuación obtendremos las parametrizaciones de algunas superficies a partir del lugar geometrico.

Ejmeplo Esfera de radio a





Nos fijamos en P' proyección de P en el plano XY



según la figura

$$\cos(u) = \frac{x'}{h} \quad \operatorname{sen}(u) = \frac{y'}{h} \quad \Rightarrow \quad x' = h\cos(u), \quad y' = h\operatorname{sen}(u)$$

para el punto p se tiene

$$\cos(v) = \frac{z}{a} \quad \operatorname{sen}(v) = \frac{h}{a} \quad \Rightarrow \quad z = a\cos(v), \quad h = a\operatorname{sen}(v)$$

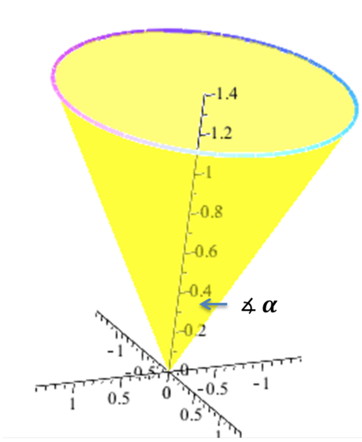
por lo tanto las coordenadas del punto P que describen el lugar geometrico son

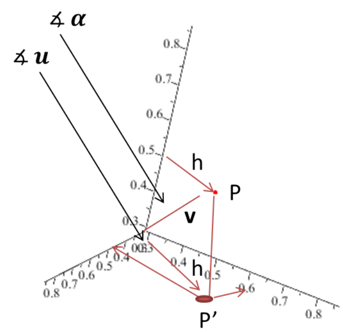
$$(x', y', z) = (h\cos(u), h\,\mathrm{sen}(u), a\cos(u)) \underbrace{=}_{h=a\,\mathrm{sen}(v)} (a\,\mathrm{sen}(v)\cos(u), a\,\mathrm{sen}(v)\,\mathrm{sen}(u), a\cos(u))$$

y una parametrización de la esfera es:

$$f(u, v) = (a\,\mathrm{sen}(v)\cos(u), a\,\mathrm{sen}(v)\,\mathrm{sen}(u), a\cos(u)) \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, \pi]$$

Ejmeplo Cono





Nos fijamos en P' proyección de P en el plano XY según la figura

$$\cos(u) = \frac{x'}{h} \quad \mathrm{sen}(u) = \frac{y'}{h} \quad \Rightarrow \quad x' = h\cos(u), \quad y' = h\,\mathrm{sen}(u)$$

para el punto p se tiene

$$\cos(\alpha) = \frac{z}{v} \quad \mathrm{sen}(\alpha) = \frac{h}{v} \quad \Rightarrow \quad z = v\cos(\alpha), \quad h = v\,\mathrm{sen}(\alpha)$$

por lo tanto las coordenadas del punto P que describen el lugar geometrico son

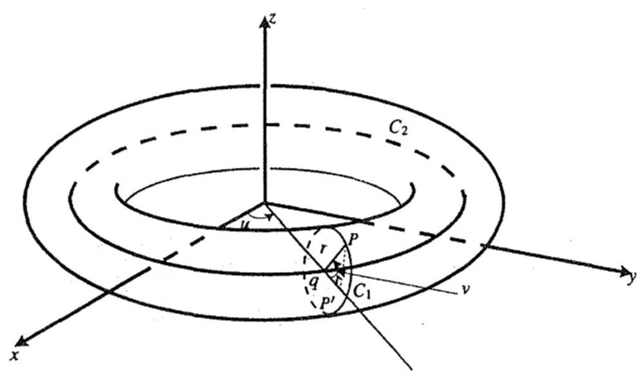
$$(x', y', z) = (h\cos(u), h\,\mathrm{sen}(u), v\cos(\alpha)) \underbrace{=}_{h=v\,\mathrm{sen}(\alpha)} (v\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(u), v\,\mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(u), v\,\mathrm{sen}(\alpha))$$

y una parametrización del cono es:

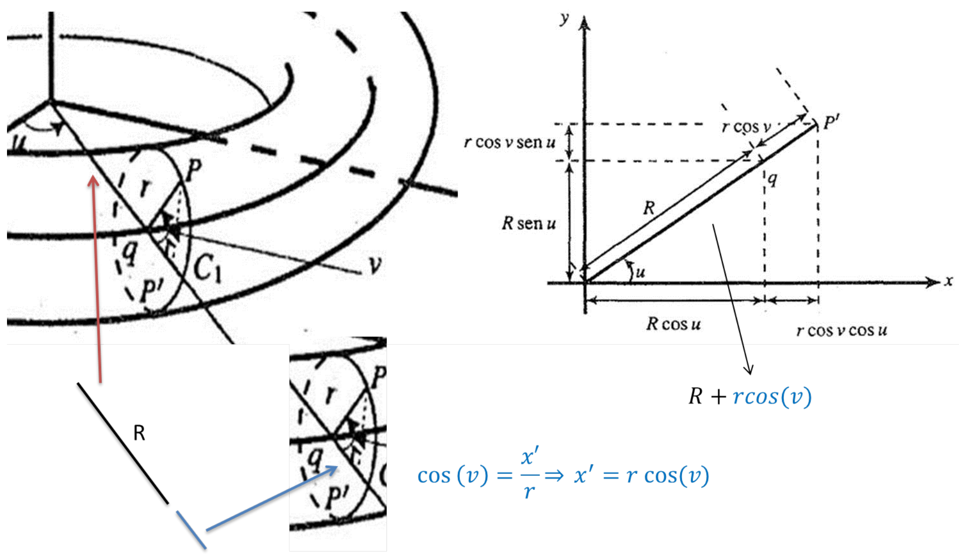
$$f(u, v) = (v\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(u), v\,\mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(u), v\,\mathrm{sen}(\alpha)) \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, \pi], \quad \alpha = k \quad fijo$$

Ejemplo Parametrización del TORO

Para esto tomemos un circulo C_1 de radio r y hagamoslo girar alrededor del eje Z. Llamemos R a la distancia del centro de C_1 al eje de rotación. Se tiene asi un circulo C_2 de radio R. A la superficie generada por C_1 se le llama TORO. Vamos a obtener su parametrización. Designemos por u, v los ángulos mostrados en la figura



Se trata de describir las coordenadas x, y, z del punto P en términos de los parámetros u, v. Se tiene



según la figura

$$\cos(u) = \frac{x'}{R + r\cos(v)}, \quad \operatorname{sen}(u) = \frac{y'}{R + r\cos(v)} \quad \Rightarrow \quad x' = (R+r\cos(v))\cos(u), \quad y' = (R+r\cos(v))\sin(u)$$

$$\operatorname{sen}(v) = \frac{z}{r} \quad \Rightarrow \quad z = r\operatorname{sen}(v)$$

Las coordenadas de P' seran

$$x' = R\cos(u) + r\cos(v)\cos(u) \quad y' = R\,\mathrm{sen}(u) + r\cos(v)\,\mathrm{sen}(u)$$

Estas también serán las coordenadas x, y del punto P. La coordenada z se obtiene del triángulo y es $z = r\,\mathrm{sen}(v)$
por lo tanto una parametrización del toro será

$$f(u,v) = (x', y', z) = (R\cos(u)+r\cos(v)\cos(u), R\,\mathrm{sen}(u)+r\cos(v)\,\mathrm{sen}(u), r\,\mathrm{sen}(v)) \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 2\pi]$$