Parametrización de Superfícies z=f(x,y)

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$$

una función inyectiva de clase c^1 (es decir sus funciones componentes $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son de clase c^1)
Supongámos que
i)D es una región cerrada, acotada, simplemente conexa y cuya frontera es diferenciable
ii) $f(D)$ no tiene puntos dobles es decir si $Q_1 \neq Q_2 \in D$ entonces $f(Q_1) \neq f(Q_2)$
iii) f tiene derivadas continuas en D
iv) En ningún punto $Q \in D$ los jacobianos

$$J_1 = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \qquad J_2 = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \qquad J_1 = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

son todos iguales a cero.
Suponga que una superficie S, satisface lo anterior, y sea $P_0 \in S$

Teorema 1. *Sea P_0 un punto en la superfície. Entonces existe una vecindad de P_0 en la cual S se representa por una ecuación en la cual una de las variables x,y,z se expresa como una función de las otras dos, por ejemplo $z = \phi(x,y)$.*

Demostración. Como no todos los jacobianos J_1, J_2, J_3 se hacen cero en P_0 supóngase que $J_3 \neq 0$ allí; ésta es precisamente la condición según el teorema de la función implicita para que $x = f_1(u,v), y = f_2(u,v)$ puedan resolverse para (u,v) en términos de (x,y) en una vecindad de P_0. Las primeras de estas funciones se reducen a identidades y la tercera se puede transformar en $z = \phi(x,y) = h[u(x,y), v(x,y)]$ □

Ejemplo De la parametrización de la esfera de radio a

$$f(u,v) = (a\operatorname{sen}(v)\cos(u), a\operatorname{sen}(v)\operatorname{sen}(u), a\cos(u)) \quad u \in [0,2\pi], \quad v \in [0,\pi]$$

tenemos que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(a\operatorname{sen}(v)\cos(u))}{\partial u} & \frac{\partial(a\operatorname{sen}(v)\cos(u))}{\partial v} \\ \frac{\partial a\operatorname{sen}(v)\operatorname{sen}(u)}{\partial u} & \frac{\partial a\operatorname{sen}(v)\operatorname{sen}(u)}{\partial v} \end{vmatrix} = -a^2\operatorname{sen}(v)\cos(v) \neq 0 \ \ para \ \ v \neq 0, n\frac{\pi}{2}, n\pi$$

por lo tanto para esos puntos z se puede escribir en términos de x,y de esta manera podemos obtener una ecuación cartesiana de la esfera.
Para obtener la ecuación cartesiana procedemos así:

$$\begin{pmatrix} x = a\operatorname{sen}(v)\cos(u) \\ y = a\operatorname{sen}(v)\operatorname{sen}(u) \\ z = a\cos(u) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^2 = a^2\operatorname{sen}^2(v)\cos^2(u) \\ y^2 = a^2\operatorname{sen}^2(v)\operatorname{sen}^2(u) \\ z^2 = a^2\cos^2(u) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2\operatorname{sen}^2(v)\cos^2(u) + a^2\operatorname{sen}^2(v)\operatorname{sen}^2(u) + a^2\cos^2(u) = a^2$$

por lo tanto la ecuación cartesiana de la esfera de radio a es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Ejemplo Use la ecuación cartesiana de la esfera y su parametrización, para obtener una parametrización del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

solución Para esto tenemos que

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \;\Rightarrow\; \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

esta última ecuación tiene la forma de la ecuación cartesiana de una esfera de radio 1, por lo tanto usamos la parametrización de la esfera de radio 1, es decir

$$\frac{x}{a}=\operatorname{sen}(v)\cos(u) \quad \frac{y}{b}=\operatorname{sen}(v)\operatorname{sen}(u) \quad \frac{z}{c}=\cos(u) \;\Rightarrow\; x=a\operatorname{sen}(v)\cos(u),\;\; y=b\operatorname{sen}(v)\operatorname{sen}(u),\;\; z=c\cos(u)$$

de esta manera una parametrización del elipsoide es

$$f(u,v)=(a\operatorname{sen}(v)\cos(u),b\operatorname{sen}(v)\operatorname{sen}(u),c\cos(u), \quad u\in[0,2\pi], \quad v\in[0,\pi]$$

Ejercicio Obtener la ecuación cartesiana de

Plano

$$f(u,v)=(x_0+a_1u+b_1v,y_0+a_2u+b_2v,z_0+a_3u+b_3v)$$

Paraboloide Eliptico

$$f(u,v)=(au\cos(v),bu\operatorname{sen}(v),u^2)$$

Superficie de Revolución

$$f(u,v)=(u\cos(v),u\operatorname{sen}(v),f(u))$$

Cilindro

$$f(u,v)=(u,a\operatorname{sen}(v),a\cos(v))$$

Toro

$$f(u,v)=((a+b\cos(u))\operatorname{sen}(v),(a+b\cos(u))\cos(v),b\operatorname{sen}(u)) \quad 0<b<a$$

Solución Para el plano usaremos la ecuación

$$(P-P_0)\cdot N=0$$

donde

$$P=(x,y,z), \quad P_0=(x_0,y_0,z_0), \quad N=(a_1,a_2,a_3)\times(b_1,b_2,b_3)$$

$$N=(a_1,a_2,a_3)\times(b_1,b_2,b_3)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2,-a_1b_3+a_3b_1,a_1b_2-a_2b_1)$$

por lo tanto se tiene

$$((x,y,z)-(x_0,y_0,z_0))\cdot(a_2b_3-a_3b_2,-a_1b_3+a_3b_1,a_1b_2-a_2b_1)=0$$

y la ecuación cartesiana del plano es:

$$(x-x_0)(a_2b_3-a_3b_2)+(y-y_0)(-a_1b_3+a_3b_1)+(z-z_0)(a_1b_2-a_2b_1)=0$$

Para el paraboloide Eliptico procedemos

$$\begin{pmatrix} x=au\cos(v) \\ y=bu\,\mathrm{sen}(v) \\ z=u^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^2=a^2u^2\cos^2(v) \\ y^2=b^2u^2\,\mathrm{sen}^2(v) \\ z=u^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{x^2}{a^2}=u^2\cos^2(v) \\ \frac{y^2}{b^2}=u^2\,\mathrm{sen}^2(v) \\ z=u^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=u^2(\cos^2(v)+\mathrm{sen}^2(v))=u^2=z$$

por lo tanto la ecuación cartesiana del paraboloide eliptico es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

Para la superficie de revolución procedemos

$$\begin{pmatrix} x=u\cos(v) \\ y=u\,\mathrm{sen}(v) \\ z=f(u) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^2=u^2\cos^2(v) \\ y^2=u^2\,\mathrm{sen}^2(v) \\ z=f(u) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x^2+y^2=u^2(\cos^2(v)+\mathrm{sen}^2(v))=u^2 \quad\Rightarrow\quad u=\sqrt{x^2+y^2} \quad\Rightarrow\quad f(u)=f(\sqrt{x^2+y^2})$$

por lo tanto la ecuación cartesiana del paraboloide eliptico es:

$$z=f(\sqrt{x^2+y^2})$$

Para el cilindro procedemos

$$\begin{pmatrix} x=u \\ y=a\,\mathrm{sen}(v) \\ z=a\cos(v) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x=u \\ y^2=a^2\,\mathrm{sen}^2(v) \\ z^2=a^2\cos^2(v) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x=u \\ \frac{y^2}{a^2}=\mathrm{sen}^2(v) \\ \frac{z^2}{a^2}=\cos^2(v) \end{pmatrix}$$

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=\cos^2(v)+\mathrm{sen}^2(v)=1$$

por lo tanto la ecuación cartesiana del cilindro es:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$$

Para el Toro procedemos

$$\begin{pmatrix} x=(a+b\cos(u))\,\mathrm{sen}(v) \\ y=(a+b\cos(u))\cos(v) \\ z=b\,\mathrm{sen}(u) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^2=(a+b\cos(u))^2\,\mathrm{sen}^2(v) \\ y^2=(a+b\cos(u))^2\cos^2(v) \\ z^2=b^2\,\mathrm{sen}^2(u) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x^2+y^2=(a+b\cos(u))^2(\cos^2(v)+\mathrm{sen}^2(v))=(a+b\cos(u))^2 \;\Rightarrow\; x^2+y^2=(a+b\cos(u))^2 \;\Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=a+b\cos(u) \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x^2+y^2}-a=b\cos(u) \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2=b^2\cos^2(u) \;\Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2=b^2\cos^2(u)+b^2\operatorname{sen}^2(u)=b^2$$

por lo tanto la ecuación cartesiana del toro es:

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2=b^2$$

Vector Normal

Sea $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ dada por

$$f(u,v)=(f_1(u,v),f_2(u,v),f_3(u,v))$$

una función inyectiva de clase c^1 (es decir sus funciones componentes $f_1,f_2,f_3:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ son de clase c^1). Decimos que f es una superficie simple si los vectores

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\left(\frac{\partial f_1}{\partial u},\frac{\partial f_2}{\partial u},\frac{\partial f_3}{\partial u}\right)\qquad \frac{\partial f}{\partial v}=\left(\frac{\partial f_1}{\partial v},\frac{\partial f_2}{\partial v},\frac{\partial f_3}{\partial v}\right)$$

son linealmente independientes en todo $(u,v)\in D$.

Ejemplo Sea D una región $D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2|a\le u\le b,c\le v\le d\}$ y sea $f:D\to\mathbb{R}^3$ dada por $f(u,v)=(u,v,\alpha u+\beta v+\gamma)$. Tenemos entonces que

$$\frac{\partial f}{\partial u}=(1,0,\alpha)\qquad \frac{\partial f}{\partial v}=(0,1,\beta)$$

los cuales son linealmente independientes $\forall$ valor de γ,β $\therefore$ $S=f(D)$ es una superfície simple.

Si llamo

$$T_u=\frac{\partial f}{\partial u}\quad T_v=\frac{\partial f}{\partial v}$$

al ser vectores linealmente independientes con ellos puedo generar el vector $T_u\times T_v$ el cual es normal a la superfície en un punto dado, y con estos elementos puedo determinar un plano tangente a una superfície dada en un punto dado.

Definición 1. *Una superfície es suave si en cada punto de ella puedo definir un plano tangente.*

Definición 2. *Una superfície es suave en $\phi(u_0,v_0)$ si $T_u\times T_v\neq 0$ en (u_0,v_0), y la superfície es suave si es suave en todos los puntos $\phi(u_0,v_0)\in S$.*

En caso de que $T_u\times T_v=0$ para algun o algunos puntos de una superfície, entonces ahí no se puede definir un plano tangente.