Tarea 1

Sección 1.1 Área de un Conjunto Plano

1.- Demostrar lo siguiente: Sea $A \subset \mathbb{R}^2$. Si área $(A) > 0$ y $0 < \alpha < 1$, entonces existe algún rectángulo Q, tal que

$$\acute{a}rea\ (Q \bigcap A) > \alpha \cdot\ \acute{a}rea(Q)$$

2.-Sea D el disco unitario y sea

$$D^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \quad y \quad y > 0\}$$

Muestre que

$$\acute{a}rea\ (D) = 2 \cdot\ \acute{a}rea\ (D^+)$$

3.-Si $A = \{(\sqrt{2}, 0)\}$ y $B = disco\ \ unitario$ entonces $A \bigcap B = \emptyset$, y si $C = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ entonces $A \bigcap C \neq \emptyset$

Sección 1.2 Integral de una función de dos variables

4.-Pruebe que si $A \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto acotado, entonces existe R un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ tal que $A \subset R$

5.-Sean $P,\ Q$ dos particiones del rectángulo $R \subset \mathbb{R}^2$. Pruebe que Q refina a P si y solo si $P \subset Q$

6.-Sea $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ acotada tal que $f(x) = 0 \ \ \forall\ x \in\ \ int\ (R)$. Pruebe que f es integrable sobre R y que

$$\int_R f = 0$$

7.-Sea $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ acotada tal que $f(x) \geq 0 \ \ \forall\ x \in\ \ (R)$. Si para toda $\epsilon > 0$ existe P una partición de R tal que $\overline{S}(f, P) < \epsilon$ entonces f es integrable sobre R y

$$\int_R f = 0$$

Sección 1.3 Propiedades de las Integrales

8.- Sean $f, g : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tales que f es continua en R y g integrable sobre R. Entonces

$$\int_R f = f(\xi) \cdot\ A(R) \quad para \quad alguna \quad \xi \in R$$

si $g(x) > 0 \quad \forall x \in R$ entonces

$$\int_R f \cdot g = f(\xi) \int_R g \quad para \quad alguna \quad \xi \in R$$

9.-Pruebe que si f es integrable sobre R entonces f^2 es integrable sobre R

Sección 1.4 Conjuntos de Medida Cero

10.-Sea

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = y_0,\ x \geq 0\}$$

Pruebe que A tiene medida cero

11.-Pruebe que un intervalo cerrado $[a, b]$ no tiene medida cero