Tarea 4

1.- Sea u una función armónica; esto es, $\nabla^2 u = 0$. Mostrar que si u alcanza su valor máximo en $D \bigcup Fr(D)$, también lo alcanza en $Fr(D)$

2.-Se dice que una función es subarmónica en D si $\nabla^2 u \geq 0$ en D. Se dice que es supraarmónica si $\nabla^2 u \leq 0$.

(a) Deducir un principio del máximo para funciones subarmónicas

(b) Deducir un principio del máximo para funciones supraarmónicas

3.- Usar el teorema de Green para probar la fórmula de cambio de variables en el siguiente caso especial

$$\int_D dx\ dy = \int_{D*} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\ dv$$

para una transformación $(u,v) \to (x(u,v), y(u,v))$

4.-Si C es una curva cerrada que es la frontera de una superficie S, y f y g son funciones C^2, mostar que

$$(a) \quad \int_C f\nabla g \cdot\ ds = \int_S \nabla f \times \nabla g\ ds$$

$$(b) \quad \int_C (f\nabla g + g\nabla f) \cdot\ ds = 0$$

5.-Integrar $\nabla \times F$, con $F = (3y, -xz, -yz^2)$ sobre la parte de la superficie $2z = x^2 + y^2$ debajo del plano $z = 2$, directamente y usando el teorema de Stokes

6.-Suponer que F satisface, $div\ F = 0$ y $rot\ F = 0$. Mostrar que podemos escribir $F = \nabla f$, donde $\nabla^2 f = 0$

7.- Suponer que F es tangente a las superficies cerradas S de una región Ω. Probar que

$$\int_\Omega (div\ F)\ dV = 0$$

8.-Demostar que

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi} \log \|x - y\|$$

satisface las propiedades de la función de Green, de modo que una solución de $\nabla^2 u = \rho$ es

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(y) \log \|x - y\|\ dy$$