Integrales Triples

Definición 1. *Un paralelepipedo B es el producto cartesiano de tres intervalos, es decir*

$$B = [a,b] \times [c,d] \times [u,v] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, p \leq z \leq q\}$$

y una partición P de B no será más que el producto cartesiano de tres particiones:

$$P = P_1 \times P_2 \times P_3$$

con

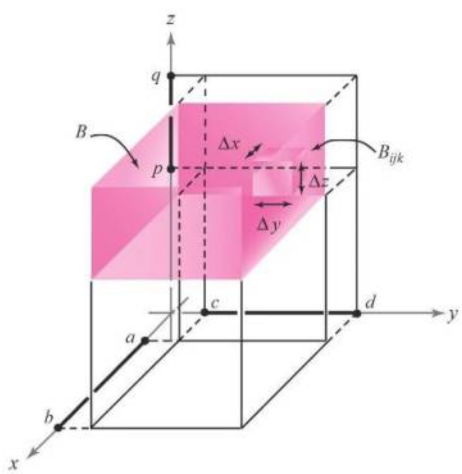
$$P_1 = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$$

$$P_2 = \{c = y_0, y_1, ..., y_m = d\}$$

$$P_3 = \{u = z_0, z_1, ..., z_l = v\}$$

$$P = \{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k] \mid i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., m,\ k = 1, ..., l\}$$

Dada una función continua $f : B \to \mathbb{R}$ donde B es algún paralelepipedo rectangular en $\mathbb{R}^3$ podemos definir la integral de f sobre B como un límite de sumas, partimos los tres lados de B en "n"partes iguales.



Para las sumas inferiores se tiene

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{ijk} V(B_{ijk})$$

Para las sumas superiores

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} M_{ijk} V(B_{ijk})$$

donde $B_{ijk} \in B$, el ijk-ésimo paralelepipedo rectangular o caja en la partición de B y $V(B_{ijk})$ es el volumen de B_{ijk}

Ejemplo Calcular

$$\int_B f \quad donde \quad f : B \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ \ esta \ \ dada \ \ por \ \ f(x,y,z) = xyz$$

Solución consideremos la partición

$$P = \left\{ \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] \times \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \right\}$$

con lo que se tendrá

$$m_{ijk} = \text{mín}\{xyz \mid x, y, z \in B_{ijk} = \frac{(i-1)(j-1)(k-1)}{n^3}$$

$$M_{ijk} = \text{máx}\{xyz \mid x, y, z \in B_{ijk} = \frac{(i)(j)(k)}{n^3}$$

por lo que

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{ijk}V(B_{ijk}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(i-1)(j-1)(k-1)}{n^3}\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^6}\sum_{i=1}^{n}(i-1)\sum_{j=1}^{n}(j-1)\sum_{k=1}^{n}(k-1)$$

$$= \frac{1}{n^6}\frac{(n-1)n}{2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}\cdot\frac{(n-1)}{2} = \frac{(n-1)^3}{8n^3}$$

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{ijk}V(B_{ijk}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(i)(j)(k)}{n^3}\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^6}\sum_{i=1}^{n}(i)\sum_{j=1}^{n}(j)\sum_{k=1}^{n}(k)$$

$$= \frac{1}{n^6}\frac{(n+1)n}{2}\cdot\frac{(n+1)n}{2}\cdot\frac{(n+1)}{2} = \frac{(n+1)^3}{8n^3}$$

tomando limite se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^3}{8n^3} = \frac{1}{8}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{8n^3} = \frac{1}{8}$$

por lo tanto

$$\int_B f = \int\int\int_B xyz\,dxdydz = \frac{1}{8}$$

Definición 2. *Sea f una función acotada de tres variables, definida en B. La llamamos integral triple o simplemente integral de f en B, y la denotamos*

$$\int_B f dv \quad , \quad \int_B f(x,y,z)dr \quad , \quad \int\int\int_B f(x,y,z)dxdydz$$

Resultados análogos a las integrales dobles que se cumplen para integrales triples.

- Las funciones continuas definidas en B son integrables
- Funciones acotadas cuyas discontinuidades estan confinadas en gráficas de funciones continuas son integrables

Si $B = [a,b]\times[c,d]\times[u,v]$. Entonces tenemos las integrales iteradas

$$\int_u^v\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdydz \qquad \int_u^v\int_a^b\int_c^d f(x,y,z)d \qquad \int_a^b\int_u^v\int_c^d f(x,y,z)dydzdx$$

El orden de dx, dy, dz indica como se realiza la integración como en el caso de 2 variables, se cumple el teorema de fubini si f es continua, entonces las 6 posibles integrales son iguales. En otras palabras , una

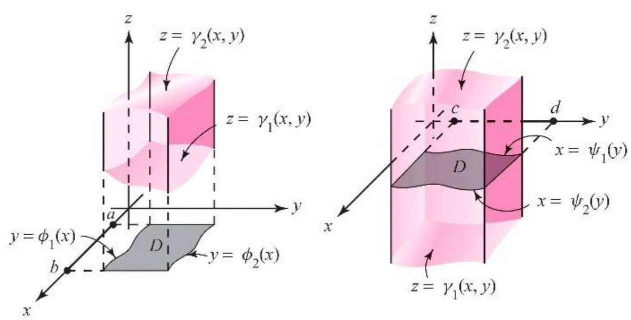
integral triple se puede reducir a una triple integración iterada.
La idea es considerar conjuntos acotados (cajas) $W \subset \mathbb{R}^3$ tal que $B \subset W$. Asi dada dada $f : W \to \mathbb{R}$ definimos $\bar{f}$ que coincide con f en W y cero fuera de W. Si B es una caja que contiene a W y ∂W está formada por las gráficas de un número finito de funciones continuas, $\bar{f}$ sera integrable y $\displaystyle\int_W f(x, y, z)dv = \int_b \bar{f}(x, y, z)dW$

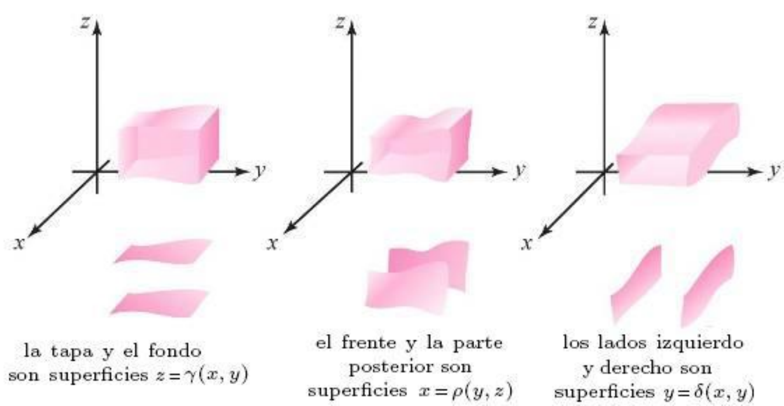
Una región W es de tipo I si:

1. $a \le x \le b \quad \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x) \quad \varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y)$
2. $c \le y \le d \quad \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \quad \gamma_1(x, y) \le z \le \gamma_2(x, y)$

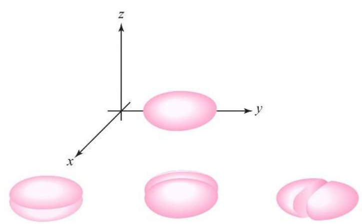
Una región es de tipo II si se puede expresar como 1. y 2. intercambiando x y z. W es del tipo III si se puede expresar como 1. y 2. con y y z intercambiados.

Una región W que sea del tipo I, II y III se llama del tipo IV.





Un ejemplo de una región del tipo IV es la bola de radio r, $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$

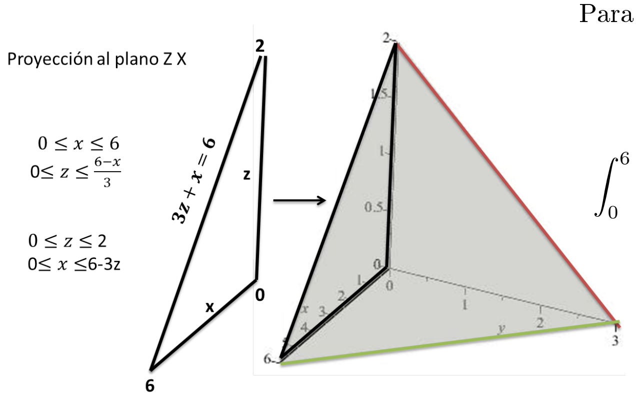


Ejemplo Considere la integral reiterada

$$I = \int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} xy^2 dzdydx$$

Mostrar que sus limites de integración definen una región que se puede tomar indistintamente como cualquiera de las seis formas posibles y cambiar el orden de integración para obtener las otras formas de integrales reiteradas.

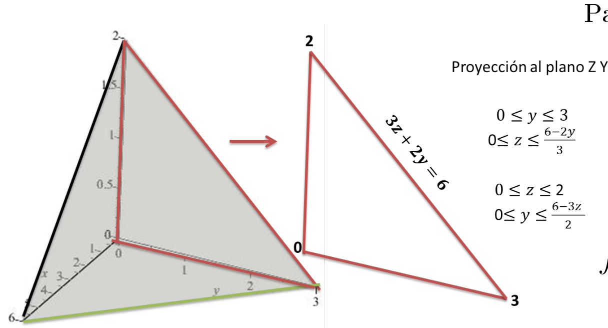
Solución En el plano X Z se tiene



Para el Plano X Z se tiene

$$0 \leq x \leq 6$$
$$0 \leq z \leq \frac{6-x}{3}$$
$$0 \leq y \leq \frac{6-x-3z}{2}$$
$$\int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{3}} \int_0^{\frac{6-x-3z}{2}} xy^2 dydzdx$$

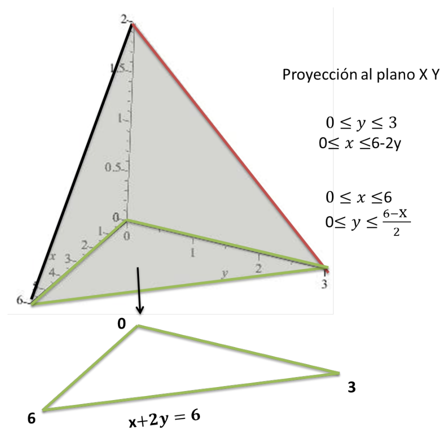
$$0 \leq z \leq 2$$
$$0 \leq x \leq 6-3z$$
$$0 \leq y \leq \frac{6-x-3z}{3}$$
$$\int_0^2 \int_0^{6-3z} \int_0^{\frac{6-x-3z}{2}} xy^2 dydxdz$$



Para el Plano Y Z se tiene

$$0 \leq y \leq 3$$
$$0 \leq z \leq \frac{6-2y}{3}$$
$$0 \leq x \leq 2 - \frac{3}{2}y - z$$
$$\int_0^3 \int_0^{\frac{6-2y}{3}} \int_0^{2-\frac{3}{2}y-z} xy^2 dxdzdy$$

$$0 \leq z \leq 2$$
$$0 \leq y \leq \frac{6-3z}{3}$$
$$0 \leq x \leq 2 - \frac{3}{2}y - z$$
$$\int_0^2 \int_0^{\frac{6-3z}{2}} \int_0^{2-\frac{3}{2}y-z} xy^2 dxdydz$$



Para el Plano X Y se tiene

$$0 \leq y \leq 3 \qquad\qquad 0 \leq x \leq 6$$

$$0 \leq x \leq 6 - 2y \qquad\qquad 0 \leq y \leq \frac{6-3x}{2}$$

$$0 \leq z \leq \frac{6-x-2y}{3} \qquad\qquad 0 \leq z \leq \frac{6-x-2y}{3}$$

$$\int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} xy^2 dzdydx \qquad \int_0^3 \int_0^{6-2y} \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} xy^2 dzdxdy$$