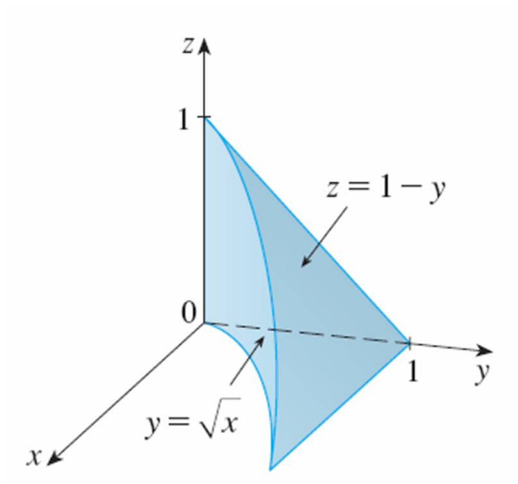
Ejemplos de Integrales triples extendidas a regiones mas generales

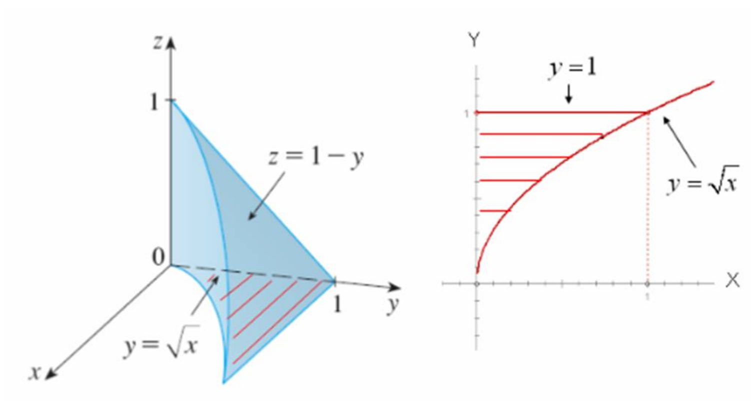
Ejemplo La figura siguiente muestra la región de integración para la integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} dzdydx$$



Vuelva a escribirla como una integral iterada equivalente en los otros cinco ordenes.

Solucion Para esto nos vamos a fijar en la proyección de la superfície en el plano XY



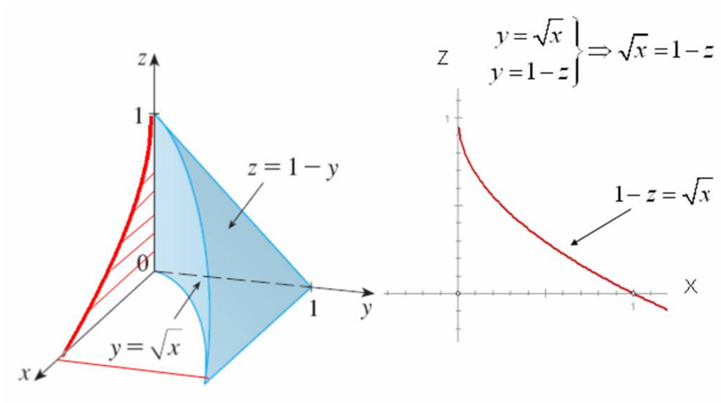
Vista como una región tipo II tenemos

$$0 \leq y \leq 1 \quad y \quad 0 \leq x \leq y^2 \quad y \quad 0 \leq z \leq 1 - y$$

$\therefore$ La integral $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} dzdydx$ con cambio de orden de integración en XY queda asi:

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} \int_0^{1-y} dzdxdy$$

Vamos a fijarnos ahora en la proyección de la superfície en el plano XZ



Vista como una región tipo I tenemos

$$0 \leq z \leq 1 \quad y \quad 0 \leq x \leq (1-z)^2 \quad y \quad \sqrt{x} \leq y \leq 1-z$$

$\therefore$ La integral con cambio de orden de integración en XZ queda asi:

$$\int_0^1 \int_0^{(1-z)^2} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} dydxdz$$

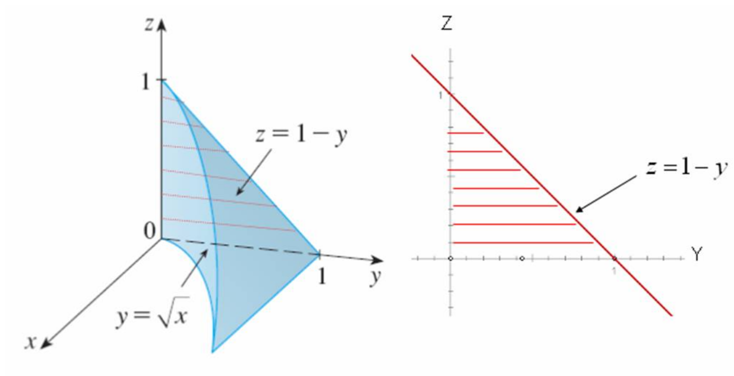
Vista como una región tipo II tenemos

$$0 \leq x \leq 1 \quad y \quad 0 \leq z \leq 1-\sqrt{x} \quad y \quad \sqrt{x} \leq y \leq 1-z$$

$\therefore$ La integral con cambio de orden de integración en XZ queda asi:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} dydzdx$$

Vamos a fijarnos ahora en la proyección de la superfície en el plano YZ



Vista como una región tipo I tenemos

$$0 \leq y \leq 1 \quad y \quad 0 \leq z \leq 1 - y \quad y \quad 0 \leq x \leq y^2$$

$\therefore$ La integral con cambio de orden de integración en XZ queda asi:

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{y^2} dxdzdy$$

Vista como una región tipo II tenemos

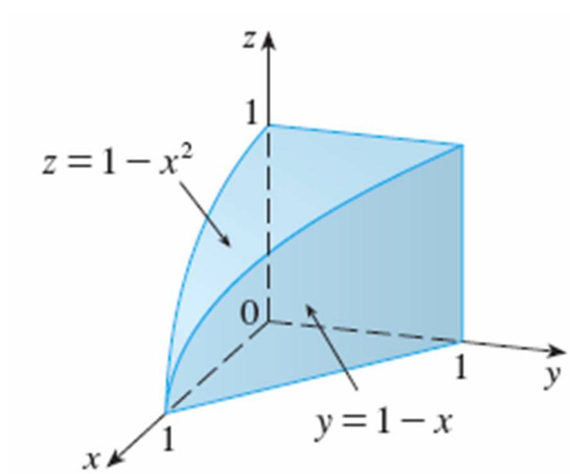
$$0 \leq z \leq 1 \quad y \quad 0 \leq y \leq 1 - z \quad y \quad 0 \leq x \leq y^2$$

$\therefore$ La integral con cambio de orden de integración en XZ queda asi:

$$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{y^2} dxdydz$$

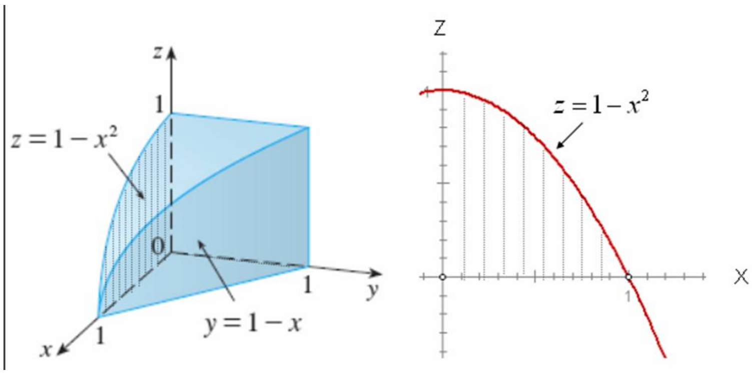
Ejemplo La figura siguiente muestra la región de integración para la integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x, y, z)dydzdx$$



Vuelva a escribirla como una integral iterada equivalente en los otros cinco ordenes.

Solucion Para esto nos vamos a fijar en la proyección de la superfície en el plano XZ



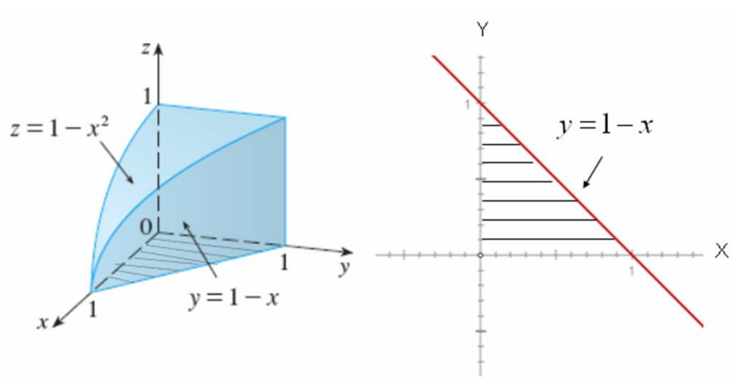
Vista como una región tipo II tenemos

$$0 \leq z \leq 1 \quad y \quad 0 \leq x \leq \sqrt{1-z} \quad y \quad 0 \leq y \leq 1-x$$

$\therefore$ La integral $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x,y,z)dydzdx$ con cambio de orden de integración en XZ queda asi:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} \int_0^{1-x} dydxdz$$

Vamos a fijarnos ahora en la proyección de la superfície en el plano XY



Vista como una región tipo I tenemos

$$0 \leq y \leq 1 \quad y \quad 0 \leq x \leq 1-y \quad y \quad 0 \leq z \leq 1-x^2$$

$\therefore$ La integral con cambio de orden de integración en XY queda asi:

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-x^2} f(x,y,z)dzdxdy$$

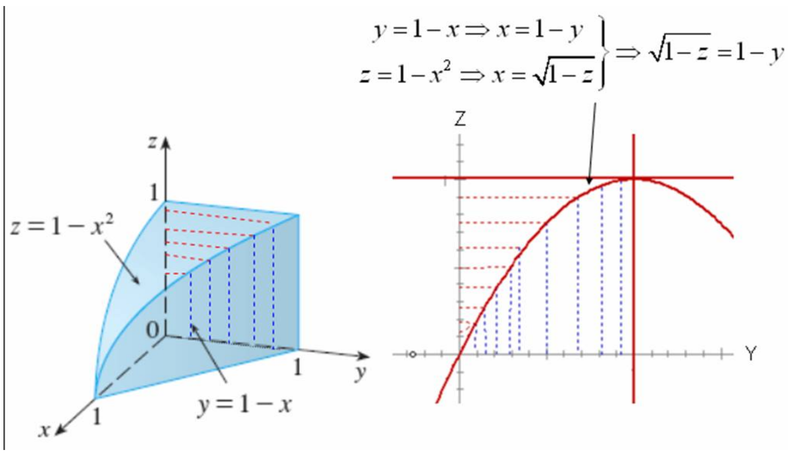
Vista como una región tipo II tenemos

$$0 \le x \le 1 \quad y \quad 0 \le y \le 1 - x \quad y \quad 0 \le z \le 1 - x^2$$

$\therefore$ La integral con cambio de orden de integración en XY queda asi:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x^2} f(x, y, z)dzdydx$$

Vamos a fijarnos ahora en la proyección de la superfície en el plano YZ



La región roja Vista como una región tipo I tenemos

$$0 \le y \le 1 \quad y \quad 1 - (1 - y)^2 \le z \le 1 \quad y \quad 0 \le x \le \sqrt{1 - z}$$

La región azul Vista como una región tipo I tenemos

$$0 \le y \le 1 \quad y \quad 0 \le z \le 1 - (1 - y)^2 \quad y \quad 0 \le x \le 1 - y$$

$\therefore$ La integral con cambio de orden de integración en ZY queda asi:

$$\int_0^1 \int_{1-(1-y)^2}^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} f(x, y, z)dxdzdy + \int_0^1 \int_0^{1-(1-y)^2} \int_0^{1-y} f(x, y, z)dxdzdy$$

La región roja Vista como una región tipo II tenemos

$$0 \le z \le 1 \quad y \quad 0 \le y \le 1 - \sqrt{1 - z} \quad y \quad 0 \le x \le \sqrt{1 - z}$$

La región azul Vista como una región tipo II tenemos

$$0 \le z \le 1 \quad y \quad 1 - \sqrt{1 - z} \le y \le 1 \quad y \quad 0 \le x \le 1 - y$$

$\therefore$ La integral con cambio de orden de integración en ZY queda asi:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{1-z}} \int_0^{\sqrt{1-z}} f(x, y, z)dxdydz + \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-z}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z)dxdydz$$