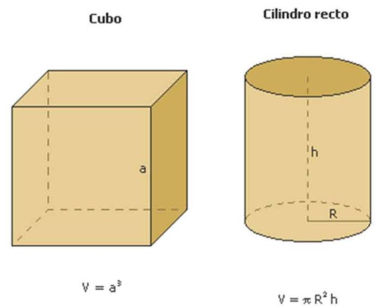
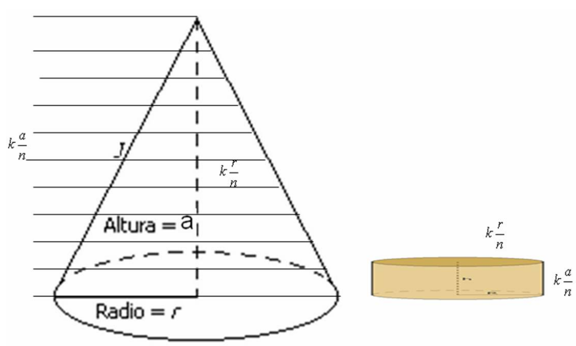
## Volumenes

Cuando definimos volumen aceptaremos el hecho de que si se trata de un cubo de lado a entonces $V(cubo) = a^3$ y si se trata de un cilíndro circular recto de radio r y altura h entonces $V(cil\acute{i}ndro) = \pi r^2 h$




Problema.- Aproximaremos el volumen de un cono de altura a. Para esto, dividamos la altura en n partes iguales, cada una de longitud $\frac{a}{n}$.

Construyamos los n cilindros de altura $\frac{a}{n}$ y radio $r_k$, k=1,...,n donde $r_k = k\frac{r}{n}$.




Entonces el volumen del k-ésimo cilindro es

$$V_k = \pi r_k^2 a_k = \pi \left(k\frac{r}{n}\right)^2 \left(\frac{a}{n}\right) = \frac{\pi a r^2 k^2}{n^3}$$

Por lo tanto el volumen del cono es

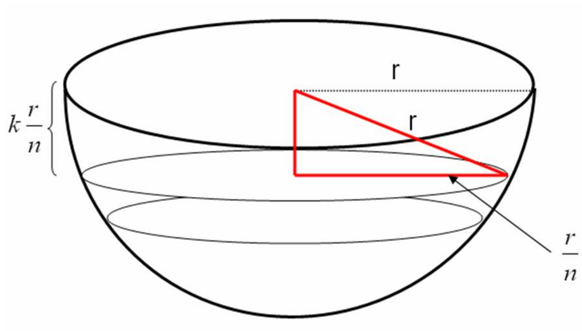
$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi a r^2 k^2}{n^3} = \frac{\pi a r^2}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{\pi a r^2 k^2}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{\pi a r^2}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

En consecuencia

$$V = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi a r^2}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}\pi a r^2$$

## Volumen de una esfera

Para esto fijemonos en la mitad de la esfera




El radio del k-ésimo cilindro es

$$r_k = \sqrt{r^2 - \left(k\frac{r}{n}\right)^2}$$

es decir

$$r_k^2 = r^2 - \left(k\frac{r}{n}\right)^2$$

entonces el volumen del k-ésimo cilindro es

$$V = \pi r_k^2 \frac{r}{n} = \pi\left(r^2 - \left(k\frac{r}{n}\right)^2\right)\frac{r}{n} = \pi r^2\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)\frac{r}{n} = \pi r^3\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)\frac{1}{n}$$

Es la mitad de la esfera, por lo que

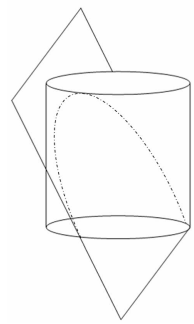
$$V \approx 2\sum_{k=1}^{n} \pi r^3\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)\frac{1}{n} = 2\pi r^3\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\right)$$

$$= 2\pi r^3\left(1 - \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right)$$

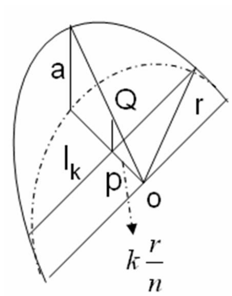
Por lo tanto

$$V = \lim_{n\to\infty} 2\pi r^3\left(1 - \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Problema.- ¿Cual es el volumen del sólido?



Para resolver esto, dividimos en triángulos rectángulos

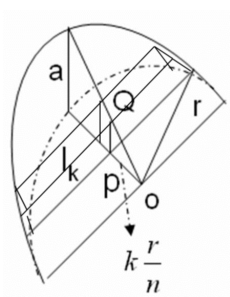



Tenemos que según la figura

$$\left(\frac{l_k}{2}\right)^2+\left(\frac{kr}{n}\right)^2=r^2$$

por lo tanto

$$l_k=2\sqrt{r^2-\left(k\frac{r}{n}\right)^2},\quad \overline{PQ}=k\frac{a}{n}$$




se tiene entonces que

$$V_k=\left(2\sqrt{r^2-\left(k\frac{r}{n}\right)^2}\right)\left(\frac{ka}{n}\right)\left(\frac{r}{n}\right)$$

$$V\approx 2r^2a\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Por lo tanto

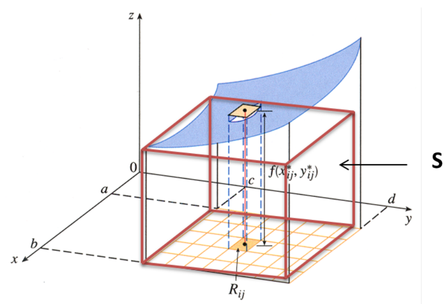
$$V=2r^2a\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\left(\frac{1}{n}\right)=2r^2a\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx=\frac{2r^2a}{3}$$

Dada una función de dos variables que está definida sobre el rectángulo cerrado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

suponiendo que $f(x, y) \geq 0$. La gráfica de f es una superfície con ecuación $z = f(x, y)$. Sea S el sólido que esta encima de R y debajo de la gráfica de f, es decir

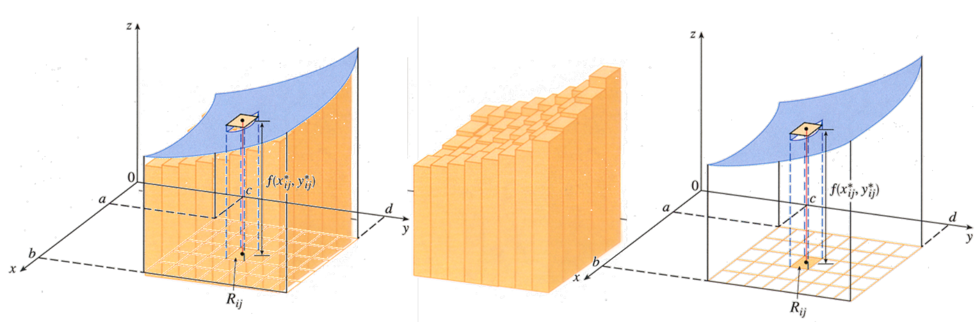
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}$$




El volumen en esta caso de S es una aproximación al volumen por debajo de la superficie
-Ahora bien si dividimos el rectángulo R en subrectángulos
Para el intervalo [a,b] tenemos m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ con una longitud de $\Delta_x = \frac{b-a}{m}$
Para el intervalo [c,d] tenemos n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ con una longitud de $\Delta_y \frac{d-c}{n}$
Al trazar rectas paralelas a los ejes coordenados a través de los puntos extremos de las particiones formamos los subrectángulos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

cada uno con un área igual a $\Delta A = \Delta_x \Delta_y$. Si elegimos un punto muestra $(x_i^*, y_j^*)$ en cada $R_{ij}$, entonces podemos aproximar la parte de S que esta encima de cada $R_{ij}$ mediante una caja rectángular delgada con base $R_{ij}$ y altura $f(x_i^*, y_j^*)$

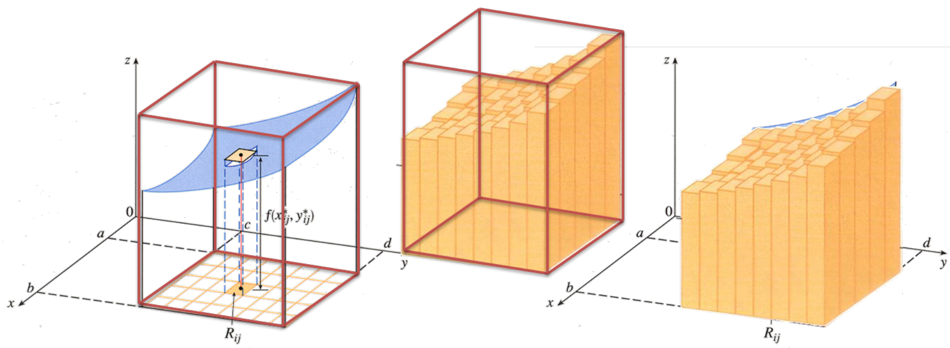


El volúmen de la caja es el producto del área de su base por su altura, por lo tanto una aproximación al volúmen de S es:

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*) \Delta A$$

Con un desarrollo analogo para un conjunto S el sólido que esta encima de R y encima de la gráfica de f, es decir

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq f(x, y) \leq z \mid (x, y) \in R\}$$




Obtenemos también una aproximación al volumen que se encuentra por debajo de la superficie
Si consideramos ahora $M_{ij} = sup\{f(x_i, y_j)\}$ y $m_{ij} = \acute{\imath}nf\{f(x_i, y_j)\}$ con $(x_i, y_j) \in R_{ij}$ podemos deducir que

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \Delta R_{ij} \leq V(S) \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} \Delta R_{ij}$$

**Definición 1.** *Sean $f$ una función (de valores reales) definida y acotada sobre un rectángulo $R$ contenido en $\mathbb{R}^n$ y $P$ una partición de $R$. Si $R_1, R_2, ..., R_k$ son los subrectángulos de $R$ inducidos por la partición $P$, definimos la suma inferior de $f$ correspondiente a la partición $P$ denotada por $\underline{S}(f, p)$ como*

$$\underline{S}(f, p) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \Delta R_{ij}$$

*Analogamente definimos la suma superior de $f$ correspondiente a la partición $P$ denotada por $\overline{S}(f, p)$ como*

$$\overline{S}(f, p) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} \Delta R_{ij}$$

Estas sumas tienen una serie de propiedades

**Proposición 1.** *Si $P$ es cualquier partición de $R$, entonces*

$$\underline{S}(f,p) \leq \overline{S}(f,p)$$

*Demostración.* Como $m_{ij} = \acute{i}nf\{f(x_i,y_j)\}$ y $M_{ij} = sup\{f(x_i,y_j)\}$ se tiene que

$$m_{ij} \leq M_{ij} \Rightarrow m_{ij}\Delta R_{ij} \leq M_{ij}\Delta R_{ij} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\Delta R_{ij} \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\Delta R_{ij} \Rightarrow \underline{S}(f,p) \leq \overline{S}(f,p)$$

□

**Proposición 2.** *Si $P,Q \in P_R$. Si $Q$ refina a $P$ entonces*

$$\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f,Q) \quad y \quad \overline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,P)$$

*Demostración.* Sean $R_1,...,R_k$ los subrectángulos inducidos por P y $R_1^i,...,R_k^i$ los subrectángulos inducidos por Q. Dado que cada $R_j^i$ está contenido en $R_i$, tenemos que $\{f(\overline{x}) \mid \overline{x} \in R_j^i\} \subset \{f(\overline{x}) \mid \overline{x} \in R_i\}$ y por lo tanto $inf\{f(\overline{x}) \mid \overline{x} \in R_i\} \leq inf\{f(\overline{x}) \mid \overline{x} \in R_i^j\}$ y $sup\{f(\overline{x}) \mid \overline{x} \in R_j^i\} \leq sup\{f(\overline{x}) \mid \overline{x} \in R_i\}$ $\therefore$

$$inf\{f(\overline{x}) \mid \overline{x} \in R_i\} \times \Delta R_{ij} \leq inf\{f(\overline{x}) \mid \overline{x} \in R_i^j\} \times \Delta R_{ij}$$

$$sup\{f(\overline{x}) \mid \overline{x} \in R_j^i\} \times \Delta R_{ij} \leq sup\{f(\overline{x}) \mid \overline{x} \in R_i\} \times \Delta R_{ij}$$

Si ahora sumamos ambas desigualdades corriendo los índices i,j se tiene que

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} inf\{f(\overline{x}) \mid \overline{x} \in R_i\} \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} inf\{f(\overline{x}) \mid \overline{x} \in R_i^j\}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} sup\{f(\overline{x}) \mid \overline{x} \in R_j^i\} \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} sup\{f(\overline{x}) \mid \overline{x} \in R_i\}$$

Recordando la definición de suma inferior y suma superior se tiene que

$$\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f,Q) \quad y \quad \overline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,P)$$

□

**Proposición 3.** *Si $P$ y $Q$ son cualesquiera dos particiones del rectángulo $R$ entonces se cumple*

$$\underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,Q)$$

*Demostración.* Consideremos la partición $P\bigcup Q$. Esta partición refina tanto a P como a Q de tal forma que, por la proposición 2 se tiene

$$\underline{S}(f,P)\leq\underline{S}(f,P\bigcup Q)$$

y también

$$\overline{S}(f,P\bigcup Q)\leq\overline{S}(f,Q)$$

Como

$$\underline{S}(f,P\bigcup Q)\leq\overline{S}(f,P\bigcup Q)$$

por la proposición 1, se tiene que

$$\underline{S}(f,P)\leq\overline{S}(f,Q)$$

□