Aplicaciones del Teorema de Stokes y del Teorema de la Divergencia a la Física

El teorema de Stokes y el teorema de la divergencia se usan a menudo para desarrollos teóricos, principalmente como herramientas en física matemática. La clave de algunas de esas aplicaciones es que, si $F(x, y, z)$ es la tasa de flujo por unidad de área, la integral de superficie

$$\int\int_S F \cdot N \; dA$$

representa la tasa neta de flujo hacia afuera por unidad de volumen. Ésta es la razón del nombre de divergencia, porque

$$\int\int_S F \cdot N \; dA = \int\int\int_D div \; F \; dV$$

La integral de la izquierda es una integral de flujo y así determina el flujo total de fluido a través de la superficie S por unidad de tiempo. Por otra parte, la integral de la derecha mide el mismo flujo de fluido, calculando el fluido hacia afuera.

Las Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell son resultados fundamentales que rigen el comportamiento de las interacciones entre campo eléctricos y campos magnéticos.
Si E y H son funciones de clase C^1 de (t, x, y, z), que son campos vetoriales para cada t.
Diremos (por definición) que satisfacen las ecuaciones de Maxwell con densidad de carga $\rho(t, x, y, z)$ y densidad de corriente $j(t, x, y, z)$ cuando se cumplan las siguientes condiciones

$$(a) \;\; \nabla \cdot E = \rho \;\; (ley \; de \; Gauss)$$

$$(b) \;\; \nabla \cdot H = 0 \;\; (No \; hay \; fuentes \; del \; campo \; magnético)$$

$$(c) \;\; \nabla \times E + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \;\; (Ley \; de \; Faraday)$$

$$(d) \;\; \nabla \times H - \frac{\partial E}{\partial t} = J \;\; (Ley \; de \; Ampere)$$

Ejercicio Sean E y H un campo eléctrico y un campo magnético respectivamente, dependientes del tiempo, en el espacio $\mathbb{R}^3$ y sea S una superficie con frontera C. Definimos

$$\int_C E \cdot N \; ds \;\; (Circulación \; del \; campo \; eléctrico \; alrededor \; de \; C)$$

$$\int\int_S H \cdot N \; ds \;\; (flujo \; del \; campo \; magnético \; a \; través \; de \; S)$$

La ley de Faraday afirma que la circulación del campo eléctrico alrededor de C es igual a la tasa de cambio del flujo del campo magnético a través de S, cambiada de signo

$$\int_C E \cdot N \; ds = -\frac{\partial}{\partial t}\int\int_S H \cdot N \; ds$$

Demostrar que la ley de Faraday se sigue de la ecuación diferencial

$$\nabla \times E = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}\int_C E \cdot N\ ds &\underbrace{=}_{Stokes} \int\int_S \nabla \times E\ ds\\ &\underbrace{=}_{\nabla\times E = -\frac{\partial H}{\partial t}} \int\int_S -\frac{\partial H}{\partial t}\cdot N\ ds\\ &\underbrace{=}_{Regla\ de\ Leibniz} -\frac{\partial}{\partial t}\int\int_S H \cdot N\ ds\end{aligned}$$

□

Ejercicio Demostrar que la ley de Faraday implica

$$\nabla \times E = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}\int\int_S \nabla \times E \cdot N\ ds &\underbrace{=}_{Stokes} \int_C E \cdot N\ ds\\ &\underbrace{=}_{Faraday} -\frac{\partial}{\partial t}\int\int_S H \cdot N\ ds\\ &\underbrace{=}_{Leibniz} \int\int_S -\frac{\partial H}{\partial t}\cdot N\ ds\\ \Rightarrow \int\int_S \left(\nabla \times E + \frac{\partial H}{\partial t}\right)\cdot N\ ds = 0&\\ \Rightarrow \nabla \times E + \frac{\partial H}{\partial t} = 0&\end{aligned}$$

□

Ley de Ampere

La ley de Ampere afirma que si la densidad de corriente eléctrica se describe por un campo vectorial J y el campo inducido es H, entonces la circulación de H alrededor de la frontera de la superficie es igual a la integral de J sobre S (es decir la corriente total que atraviesa S).

Ejercicio Demostrar que esto es consecuencia de la ecuación de Maxwell estacionaria

$$\nabla \times H = J$$

Solución En este caso se tiene

$$\int_C H\cdot N\; ds \underbrace{=}_{Stokes} \int\int_S \nabla\times H\cdot N\; ds$$
$$\underbrace{=}_{hipótesis} \int\int_S J\cdot N\; ds$$

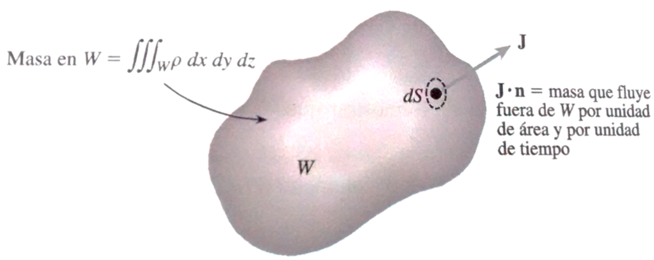
)

Ley de Conservación de Masa

Sea $V(t,x,y,z)$ un campo vectorial de clase c^1 en $\mathbb{R}^3$ para cada t y sea $\varrho(t,x,y,z)$ una función de clase c^1 con valores reales. Por ley de conservación de la masa para V y ρ, entenderemos que la condición

$$\frac{d}{dt}\int\int\int_W \rho\; dV = -\int\int_{Fr(W)} J\cdot N\; dA$$

vale para todas las regiones $W\in\mathbb{R}^3$, donde $J=\varrho V$



Si pensamos en ρ como una densidad de masa, esto es, la masa por unidad de volumen, y V como el campo de velocidad de un fluido, la condición dice simplemente que la tasa de cambio de la masa total en W es igual a la tasa a la cual la masa fluye hacia adentro de W

Teorema 1. *Para V y ρ (un campo vectorial suave y un campo escalar sobre $\mathbb{R}^3$), la ley de conservación de masa es equivalente a la condición*

$$div\; J + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

Demostración. Se tiene que

$$\int\int\int_W \frac{dp}{\partial t}\; dV = \frac{d}{\partial t}\int\int\int_W p(t,x,y,z)\; dV = -\int\int_{Fr(W)} pv\cdot N\; dA = -\int\int\int_W \nabla\cdot pv\; dV \;\Rightarrow$$

$$\int\int\int_W \frac{dp}{\partial t}\; dV = -\int\int\int_W \nabla\cdot pv\; dV \;\Rightarrow\; \int\int\int_W\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot pv\right) dV = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot pv = 0$$

□

Ecuación de Continuidad en la dinámica de fluidos

Dado un fluido con densidad $\rho(t, x, y, z)$ que fluye en una región del espacio $\mathbb{R}^3$ con velocidad $v(x, y, z, t)$ en el punto (x, y, z) en el instante t. Si no se tienen fuentes ni sumideros entonces se cumple

$$\nabla \cdot \varrho v + \frac{\partial \varrho}{\varrho t} = 0$$

que se conoce como la Ecuación de continuidad de la dinámica de fluidos

Ecuación del calor

Sea $T(x, y, z, t)$ la temperatura en cada punto (x, y, z) de un sólido D en el instante t. Si el calor específico y la densidad de masa del sólido se denotan por c, ρ respectivamente, se cumple

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\ \rho}\nabla^2 T$$

donde k es una constante llamada conductividad térmica y $\dfrac{k}{c\ \varrho}$ es llamada la constante de difusión

Ejercicio Ecuación General de Difusión Sea $T(t, x, y, z)$ una función con segundas derivadas continuas que da la temperatura en el tiempo t en el punto (x, y, z) de un sólido que ocupa una región D en el espacio. Si el calor específico y la densidad de masa del sólido se denotan por las constantes $c\ y\ \rho$, respectivamente, la cantidad $c\rho T$ se llama energía calorífica por unidad de volumen.
a) Explique por qué $-\nabla T$ señala en la dirección del flujo del calor.
b) Sea $-k\nabla T$ el vector de flujo de energía. (Aquí, la constante k se llama conductividad). Mediante la ley de la conservación de la masa, con $-k\nabla T = v$ y $c\rho T = p$, obtenga la ecuación de difusión (de calor)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\nabla^2 T$$

donde $K = \dfrac{k}{c\rho} > 0$ es la constante de difusión.

Solución a) ∇T son los puntos en la dirección de máximo cambio de temperatura,

Solución b) Suponiendo la Ley de la conservación de la masa con $-k\nabla T = pv$ y $c\rho T = p$ tenemos

$$\frac{d}{dt}\int\int\int_Q c\rho T\ dV = -\int\int -k\nabla T \cdot N\ dA \underbrace{\Rightarrow}_{Ecuación\ de\ continuidad} \nabla \cdot (-k\nabla T) + \frac{\partial(c\rho T)}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow\ c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (-k\nabla T) = k\nabla^2 T\ \Rightarrow\ \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\nabla^2 T = K\nabla^2 T$$