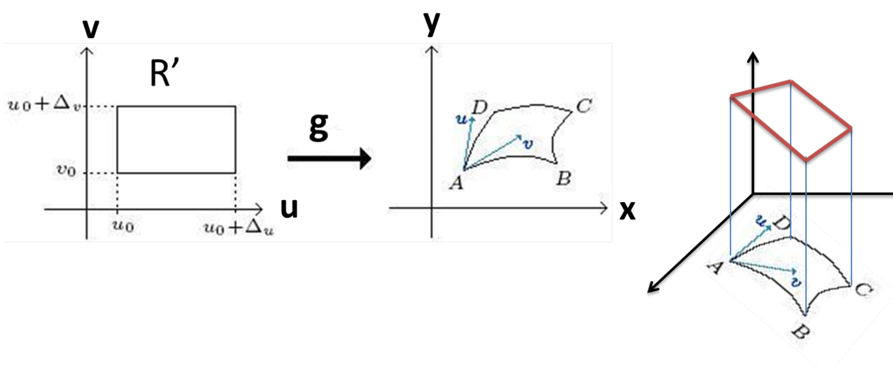
Planteamiento del Problema Dada una región $A \subset \mathbb{R}^2$ sabemos que el volumen del sólido entre la gráfica de una función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ esta dado por

$$\int_A f$$

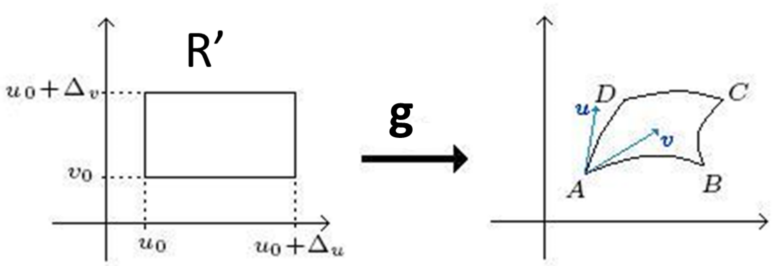
Y lo que planteamos es que a través de una función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ desde un sistema de coordenadas (u, v) a un sistema (x, y) nosotros podamos enviar un rectángulo R' en (u, v) a la región A y calcular de esta manera

$$\int_A f = \int_{R'} f \circ g$$



Herramientas previas para un esbozo de la demostración del Teorema de cambio de variable

Consideramos la región $R' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u_0 \leq u \leq u_0 + \Delta_u \quad , \quad v_0 \leq v \leq v_0 + \Delta_v\}$



Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad g(u, v) = (x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ la transformación de coordenadas que manda la región R' del plano uv en la región R del plano xy.

Consideramos la curva $\alpha : [u_0, u_0 + \Delta_u] \to \mathbb{R}^2$ dada por: $\alpha(t) = g(t, v_0) = (x(t, v_0), y(t, v_0))$

y $\beta : [v_0, v_0 + \Delta_v] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\beta(t) = g(u_0, t) = (x(u_0, t), y(u_0, t))$ y los vectores de velocidad de estas curvas son:

$\alpha'(t) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(t, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(t, v_0)\right)$

$\beta'(t) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, t), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, t)\right)$

y sus longitudes se pueden calcular como

$$L_{AB} \int_{u_0}^{u_0+\Delta_u} \|\alpha'(t)\| dt \qquad L_{AD} = \int_{v_0}^{v_0+\Delta_v} \|\beta'(t)\| dt$$

Si Δ_u y Δ_v son pequeños estas integrales son casi iguales. Ahora bien, por el T.V.M

$$\int_{u_0}^{u_0+\Delta_u} \|\alpha'(t)\| dt = \|\alpha'(u^*)\| \Delta_u \qquad \int_{v_0}^{v_0+\Delta_v} \|\beta'(t)\| dt = \|\beta'(v^*)\| \Delta_v$$

y podemos ver ahora que

$\|\alpha'(u^*)\|\Delta_u = \|u\|$ si $u = \alpha'(u^*)\Delta_u$ o bien $u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right)\Delta_u$

$\|\beta'(v^*)\|\Delta_v = \|v\|$ si $v = \beta'(v^*)\Delta_v$ o bien $v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}\right)\Delta_v$

donde las derivadas estan evaluadas en (u_0, v_0). Asi el área del paralelogramo curvilineo R es entonces aproximadamente igual al área del paralelogramo generado por los vectores u y v. Esta aproximación será un tanto mejor en cuanto Δ_u y Δ_v sean pequeños y sabemos que el área del paralelogramo generada por 2 vectores es igual a la norma del producto cruz de estos vectores.

$$u \times v = (\alpha'(u^*)\Delta_v) \times (\beta'(v^*)\Delta_v) = \Delta_u \Delta_v \alpha'(u^*) \times \beta(v^*) =$$

$$= \Delta_u \Delta_v det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \Delta_u \Delta_v \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

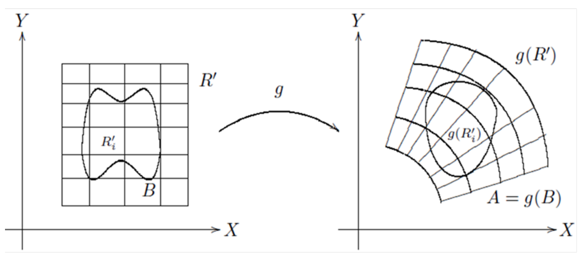
de modo que el área de la región R es aproximadamente

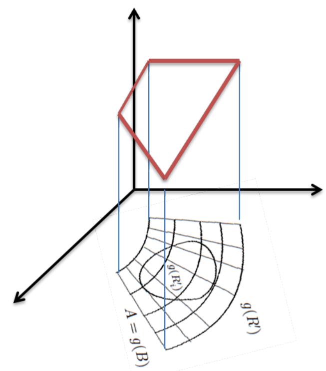
$$\|u \times v\| = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \Delta_u \Delta_v$$

en resumen $AreaR = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| (AreaR')$

Esbozo del Teorema de Cambio de Variables

Si consideramos el rectángulo R' y una partición Q de R' tal que para cada subrectángulo R'_i que intersecta a un conjunto $B \subset R'$ elegimos un $\eta_i \in R'_i \bigcap B$ y nos fijamos en $g(R'_i)$





$$\sum_{R'_i \cap B \neq \emptyset} \boldsymbol{f(g(\eta_i))\, m(g(R'_i))}$$

Queremos ver

$$\int_A f \approx \sum_{R'_i \bigcap B \neq \emptyset} f(g(\eta_i)) m(g(R'_i))$$

según lo anterior

$$\sum_{R'_i \bigcap B \neq \emptyset} f(g(\eta_i)) m(g(R'_i)) = \sum_{R'_i \bigcap B \neq \emptyset} f(g(\eta_i)) \; |\det(D_g(\eta_i))| \;\; m(R'_i)$$

$$\approx \int_B f \circ g \; |\det(D_g)|$$

por lo tanto

$$\int_A f \approx \int_B f \circ g \; |\det(D_g)|$$

Teorema de cambio de variables

Versión $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Teorema 1. *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua en A, $g : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 en B y B Jordan medible*
Si g es inyectiva en B y $\det(D_g(x)) \neq 0, \quad \forall\, x \in B$ entonces A es Jordan medible y además

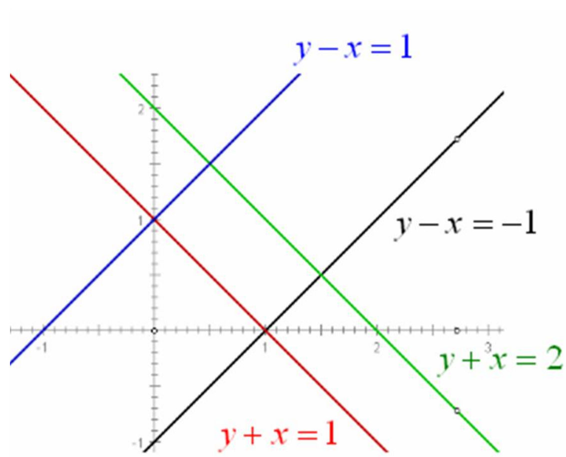
$$\int_A f = \int_B (f \circ g) \cdot |\det(D_g)|$$

Versión $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Teorema 2. *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua de las variables x,y definida en la región $R \subset \mathbb{R}^2$. Sea $F : R' \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(u,v) = (x,y) = (\phi(u,v), \psi(u,v))$ una función que manda de manera inyectiva los puntos (u,v) de la región R', en los puntos (x,y) de la región R del plano XY. Supóngase que F es de clase C^1 y que la derivada $F'(u,v)$ es una matriz inversible para todo $(u,v) \in R'$. Entonces se tiene la fórmula de cambio de variables en integrales dobles*

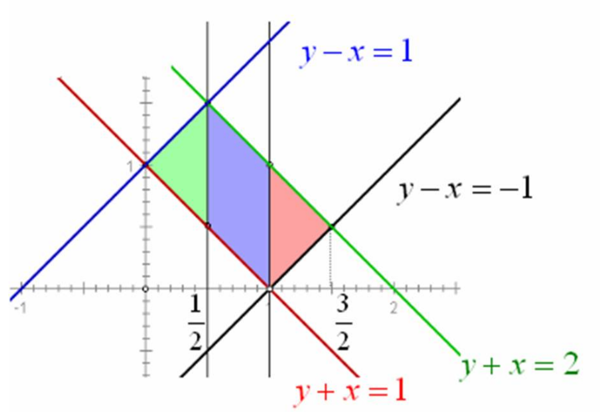
$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int\int_{R\prime} f(\phi(u,v), \psi(u,v)) \left| \frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

Ejemplo Se quiere calcular la integral de la función $f(x,y) = x + y + 1$ sobre la región limitada por las rectas $y - x = 1$, $y - x = -1$, $y + x = 1$, $y + x = 2$



Solución con integrales dobles

Para ello vamos a dividir a la region en 3 subregiones y cada una de ellas vamos a calcularla de manera independiente, para despues sumar los resultados. Tenemos entonces que



Para la región *verde*

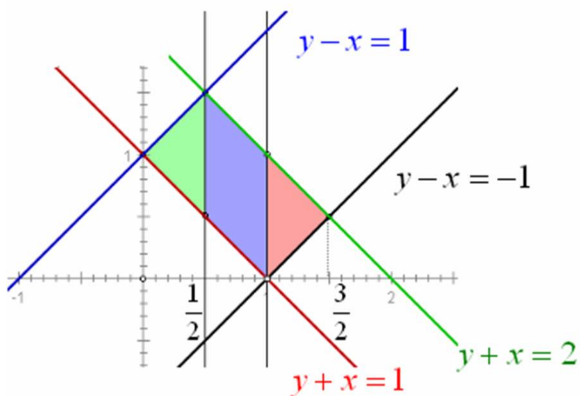
$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \qquad 1-x \leq y \leq 1+x$$

$\therefore$ la integral $\int\int_R f(x,y)dA$ se convierte en

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{1-x}^{1+x}(x+y+1)dydx = \int_0^{\frac{1}{2}} xy+\frac{y^2}{2}+y\Big|_{1-x}^{1+x}dx =$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x(1+x)\frac{(1+x)^2}{2}+(1+x)-\left(x(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2}+(1-x)\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} 4x+2x^2dx =$$

$$2x^2+\frac{2x^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{7}{12}$$



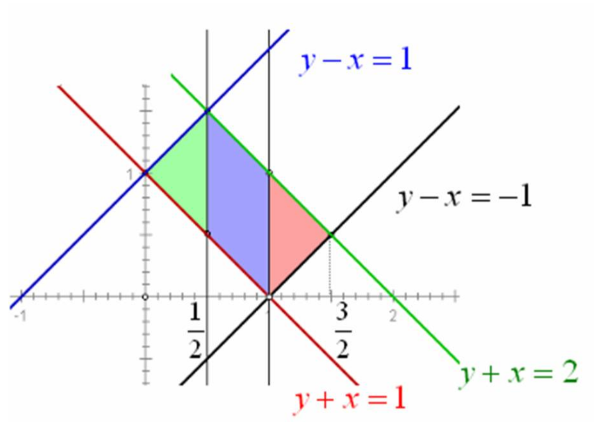
Para la región *azul*

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \qquad 1-x \leq y \leq 2-x$$

$\therefore$ la integral $\int\int_R f(x,y)dA$ se convierte en

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{1-x}^{2-x}(x+y+1)dydx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} xy+\frac{y^2}{2}+y\Big|_{1-x}^{2-x}dx =$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x(2-x)\frac{(2-x)^2}{2}+(2-x)-\left(x(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2}+(1-x)\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{5}{2}dx = \frac{5}{4}$$



Para la región *roja*

$$1 \leq x \leq \frac{3}{2} \qquad x-1 \leq y \leq 2-x$$

$\therefore$ la integral $\int\int_R f(x,y)dA$ se convierte en

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \int_{-1+x}^{2-x} (x+y+1)dydx = \int_1^{\frac{3}{2}} xy + \frac{y^2}{2} + y\,\Big|_{-1+x}^{2-x} dx =$$

$$\int_1^{\frac{3}{2}} x(2-x)\frac{(2-x)^2}{2} + (2-x) - \left(x(-1+x) + \frac{(-1+x)^2}{2} + (-1+x)\right) = \int_1^{\frac{3}{2}} -2x^2 + \frac{9}{2}dx =$$

$$\frac{-2x^3}{3} + \frac{9x}{2}\Big|_1^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ el valor de la integral $\int\int_R f(x,y)dA$ es:

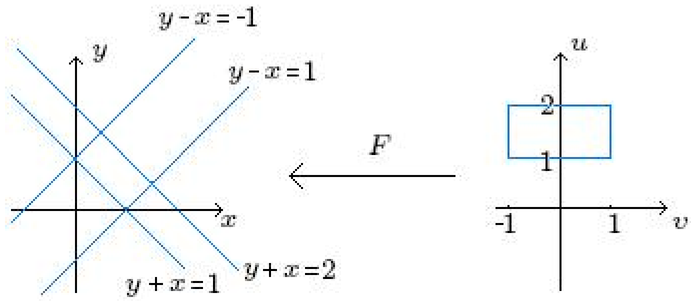
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{1-x}^{1+x} (x+y+1)dydx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{1-x}^{2-x} (x+y+1)dydx + \int_1^{\frac{3}{2}} \int_{-1+x}^{2-x} (x+y+1)dydx = \frac{7}{12} + \frac{5}{4} + \frac{2}{3} = \frac{5}{2}$$

Solución con cambio de variables Se quiere calcular la integral de la función $f(x,y) = x+y+1$ sobre la región limitada por las rectas $y-x=1$, $y-x=1$, $y+x=1$, $y+x=2$ y tomemos las variables $u=y-x$, $v=y+x$

haciendo el cambio de variables

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int\int_{R'} f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \int\int_{R'} \left(\frac{v-u}{2} + \frac{v+u}{2} + 1\right) \left|-\frac{1}{2}\right| dudv$$

$$x = \frac{v-u}{2} \quad y = \frac{v+u}{2} \quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left|-\frac{1}{2}\right| =$$



$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{1}^{2}(v+1)dvdu=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left.\frac{(v+1)^2}{2}\right|_1^2 du=\frac{5}{4}\int_{-1}^{1}du=\frac{5}{4}(2)=\frac{5}{2}$$

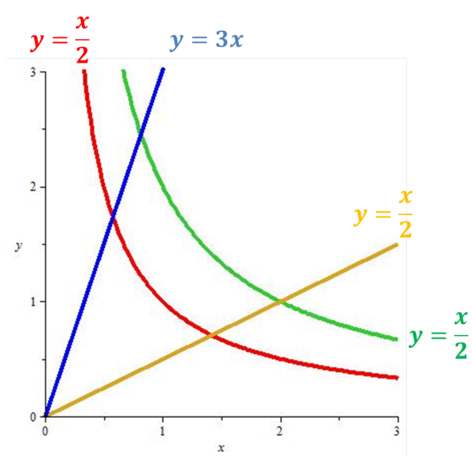
Ejemplo Calcular la integral de la función $f(x,y)=x^2y^2$ sobre la región R limitada por las hipérbolas equilateras

$$xy=1,\quad xy=2,\quad y=\frac{1}{2},\quad y=3x$$

usando la transformación

$$F(u,v)=\left(\sqrt{\frac{u}{v}},\sqrt{uv}\right)\qquad donde\qquad x=\sqrt{\frac{u}{v}}\quad y=\sqrt{uv}$$

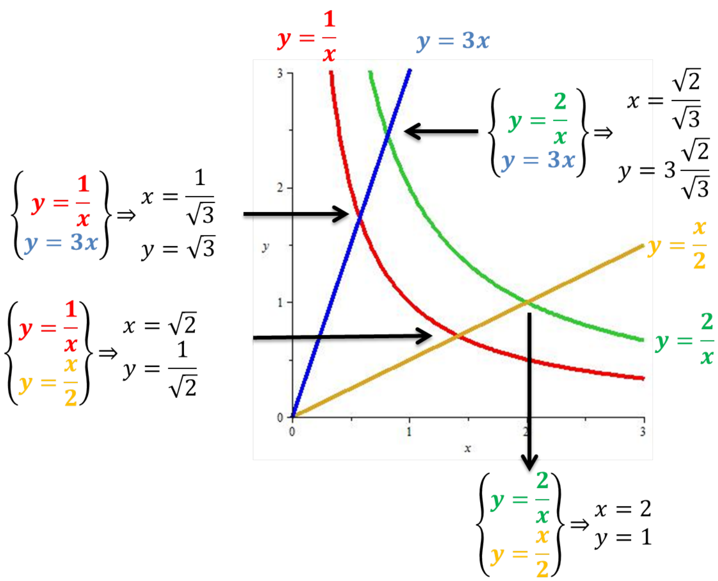
Solución La región de integración es:



Vamos a transformarla para integrar sobre un ractángulo, tenemos que

$$x=\sqrt{\frac{u}{v}},\quad y=\sqrt{uv}\quad\Rightarrow\quad u=xy\quad v=\frac{y}{x}$$

por lo que necesitamos los puntos de intersección



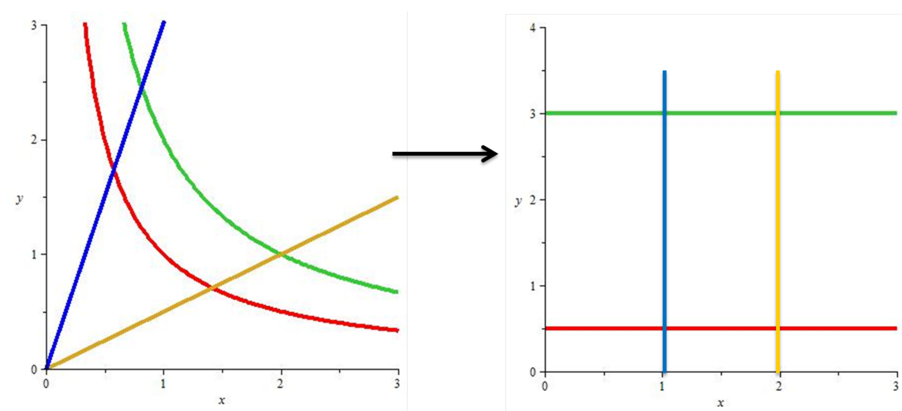
vamos ahora a transformar esos puntos, tenemos que

$$\begin{pmatrix} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = \sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u = xy = 1 \\ v = \frac{y}{x} = 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x = \sqrt{2} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u = xy = 1 \\ v = \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x = 2 \\ y = 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u = xy = 2 \\ v = \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ y = 3\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u = xy = 2 \\ v = \frac{y}{x} = 3 \end{pmatrix}$$



ahora aplicamos la transformación a la función

$$f(x,y)=x^2y^2 \Rightarrow_{x=\sqrt{\frac{u}{v}}\quad y=\sqrt{uv}} = \frac{u^2}{2v}$$

para el Jacobiano de la transformación

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(uv)^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$$

finalmente integramos sobre la región transformada

$$\int_1^2 \int_{\frac{1}{2}}^3 \frac{u^2}{2v} dvdu = \frac{7}{6}\ln(6)$$