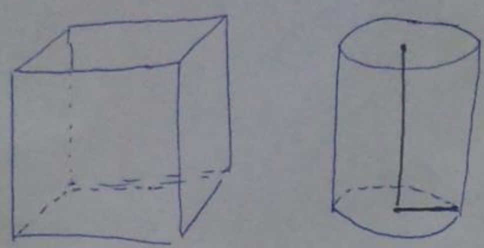
Jueves - 02 - Febrero - 2017

Aproximando el volumen de un cono

Considerando que el volumen de un cubo de lado a es a^3 y que el volumen de un cilindro de altura a y radio r es $\pi a r^2$

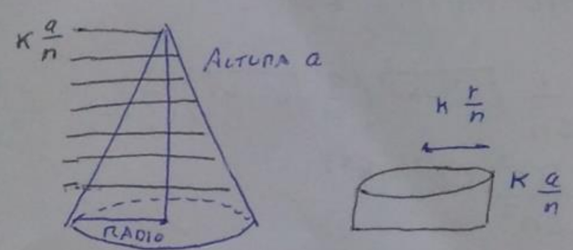


Calcular el volumen de un cono de altura a y radio r

Para esto, dividamos la altura en n partes iguales, cada una con longitud $\frac{a}{n}$,

Construyamos los n cilindros de altura $\frac{a}{n}$ y radio r_k, $k=1,\dots,n$

donde $r_k = k\frac{r}{n}$



Entonces el volumen de k-esimo cilindro es

$$V_k = \pi r_k^2 a_k = \pi\left(k\frac{r}{n}\right)^2\left(\frac{a}{n}\right) = \frac{\pi a r^2 k^2}{n^3}$$

Por lo tanto el volumen del cono es

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi a r^2 k^2}{n^3} = \frac{\pi a r^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= \frac{\pi a r^2 k^2}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

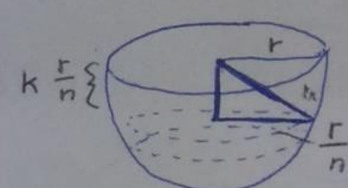
$$= \frac{\pi a r^2}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

Así que

$$V = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi a r^2}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}\pi a r^2$$

Aproximar el volumen de una esfera

Para esto fijemonos en la mitad de la esfera.



El radio del k-ésimo cilindro es

$$r_k = \sqrt{r^2 - \left(k\frac{r}{n}\right)^2}$$

es decir

$$r_k^2 = r^2 - \left(k\frac{r}{n}\right)^2$$