Entonces el volumen del k-ésimo cilindro es

$$V = \pi r_k^2 \frac{r}{n} = \pi\left(r^2 - \left(k\frac{r}{n}\right)^2\right)\frac{r}{n}$$

$$= \pi r^2\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)\frac{r}{n} = \pi r^3\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)\frac{1}{n}$$

Es la mitad del cilindro, por lo que

$$V \approx 2\sum_{k=1}^{n} \pi r^3\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)\frac{1}{n}$$

$$= 2\pi r^3\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\right)$$

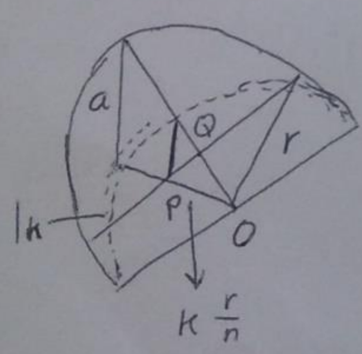
$$= 2\pi r^3\left(1 - \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right)$$

Por lo tanto

$$V = \lim_{n\to\infty} 2\pi r^3\left(1 - \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

¿Cuál es el volumen del sólido?

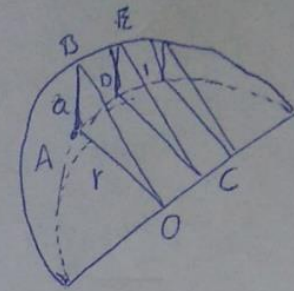
Para resolver esto, dividimos en triángulos rectángulos.




Tenemos que según la figura

$$l_k = 2\sqrt{r^2 - \left(k\frac{r}{n}\right)^2}$$

y $\overline{PQ} = k\frac{a}{n}$




En la figura

$\overline{OC} = k\frac{r}{n}$, $\overline{CD} = \sqrt{r^2 - \left(k\frac{r}{n}\right)^2}$

$\overline{DE} = k\frac{a}{n}$

Por semejanza de triángulos

$$\frac{a}{r} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}}$$

Por lo tanto $\overline{DE} = \frac{a}{n}\sqrt{n^2-k^2}$ en consecuencia el volumen del k-ésimo prisma es

$$V_k = \frac{r}{2n}\sqrt{n^2-k^2}\left(\frac{a}{n}\sqrt{n^2-k^2}\right)\left(\frac{r}{n}\right)$$

$$= \frac{ar^2}{2n^3}(n^2-k^2)$$

En consecuencia

$$V \approx 2\sum_{k=1}^{n} \frac{ar^2}{2n^3}(n^2-k^2)$$ así que

$$V = \lim_{n\to\infty} 2\sum_{k=1}^{n} \frac{ar^2}{2n^3}(n^2-k^2) =$$

$$2ar^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(n^2-k^2) = \frac{2}{3}ar^2$$