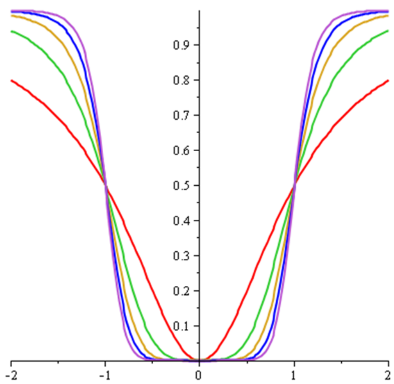
Sucesiones de Funciones

Consideremos una sucesión $\{f_n\}$, donde $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces decimos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones

Ejemplo Sea $\{f_n\}$, donde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$$

En este caso



$f_1(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

$f_2(x) = \frac{x^4}{1+x^4}$

$f_3(x) = \frac{x^6}{1+x^6}$

$f_4(x) = \frac{x^8}{1+x^8}$

$f_5(x) = \frac{x^{10}}{1+x^{10}}$

En este caso

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}} = 1$$

Al ser sucesiones, debería ocurrrir que $\forall\ \epsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n > n_0$ se cumple

$$\left| \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}} - 1 \right| < \varepsilon$$

Para justificar lo anterior tenemos que hallar n_0, en este caso

$$\left| \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{x^{2n} + 1 - 1}{1 + x^{2n}} - 1 \right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| 1 - \frac{1}{1 + x^{2n}} - 1 \right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| - \frac{1}{1 + x^{2n}} \right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 + x^{2n}} < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < 1 + x^{2n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} - 1 < x^{2n}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) < 2n\ln(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)}{2\ln(x)} < n$$

por lo que podemos tomar

$$n_0 = \frac{\ln\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)}{2\ln(x)}$$

y por tanto si $n > n_0$ entonces

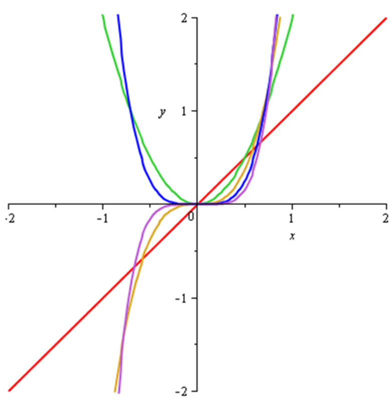
$$\left|\frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}} - 1\right| < \varepsilon$$

Obs. En este caso n_0 depende de x y de ϵ

Ejemplo Sea $\{f_n\}$, donde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por

$$f_n(x) = nx(1 - x)^n$$

En este caso



$f_1(x) = x(1 - x)$
$f_2(x)2x(1 - x)^2$
$f_3(x) = 3x(1 - x)^3$
$f_4(x) = 4x(1 - x)^4$
$f_5(x) = 5x(1 - x)^5$

En este caso

$$\lim_{n\to\infty} nx(1 - x)^n = 0$$

Al ser sucesiones, debería ocurrrir que $\forall\ \epsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n > n_0$ se cumple

$$|nx(1 - x)^n - 0| < \varepsilon$$

Para justificar lo anterior tenemos que hallar n_0, en este caso

$$f_n'(x) = -n^2x(1 - x)^{n-1} + n(1 - x)^n$$

por lo que

$$f_n'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ -n^2x(1 - x)^{n-1} + n(1 - x)^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \ n(1-x)^{n-1}(-nx+1-x)=0$$

$$\Leftrightarrow \ x=1 \ \ o \ \ x=\frac{1}{n+1}$$

Por lo tanto $f_n(x)$ alcanza su valor máximo en $\dfrac{1}{n+1}$ y tenemos que

$$|nx(1-x)^n-0|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|n\left(\frac{1}{n+1}\right)-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\right|<\epsilon$$

como

$$\left|n\left(\frac{1}{n+1}\right)-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\right|<\left|n\left(\frac{1}{n+1}\right)\right|$$

entonces

$$\left|n\left(\frac{1}{n+1}\right)-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\right|<\epsilon$$

$$\left|n\left(\frac{1}{n+1}\right)\right|<\epsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{n}{1+n}\right|<\epsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{n+1-1}{1+n}\right|<\epsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|1-\frac{1}{1+n}\right|<\epsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{1+n}-1\right|<\epsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}<\epsilon+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon+1}<n+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon+1}-1<n$$

por lo que podemos tomar

$$n_0=\frac{1}{\epsilon+1}-1$$

y por tanto si $n>n_0$ entonces

$$|nx(1-x)^n|<\varepsilon$$

Obs. En este caso n_0 no depende de x y si depende de ϵ

Nos preguntamos ahora lo siguiente: Si cada término de una sucesión $\{f_n\}$ tiene cierta propiedad, como, por ejemplo, la continuidad, la derivabilidad o la integrabilidad, ¿ en qué condiciones se conserva esa propiedad en la función límite?

Definición 1. Convergencia Puntual. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un intervalo I. Decimos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a una función f si $\{f_n\} \to f(x)$ para cada $x \in I$, es decir si $\forall\ \epsilon > 0$ existe n_0 (que depende de x y de ϵ) tal que si $n > n_0$ se cumple*

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

En la convergencia puntual

$$\forall\ \epsilon > 0,\ y\ cada\ x,\ \exists\ n_0\ tal\ que\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\ \ si\ n > n_0$$

donde n_0 depende de ϵ y de x. Si éste número n_0 se puede tomar independientemente del número x entonces diremos que la convergencia es uniforme

Definición 2. Convergencia Uniforme. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un intervalo I. Supongamos que se tiene una función f definida en I tal que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad para \ \ cada \ \ x \in \ I$$

Decimos que $\{f_n\}$ converge uniformmente a f si $\forall\ \epsilon > 0$ existe n_ϵ tal que, para $n \geq n_\epsilon$

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall\ x \in \ I$$

Ejemplo Sea $\{f_n(x)\}$ dada por

$$f_n(x) = \frac{\text{sen } nx}{n}$$

En este caso se tiene que

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\,\text{sen}(nx) \leq \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\text{sen}(nx) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\text{sen}(nx) = 0$$

Vamoa a probar que la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\,\text{sen}(nx)$$

converge uniformemente a la función constante 0.
En este caso

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n}\,\text{sen}(nx) - 0\right| &= \left|\frac{1}{n}\,\text{sen}(nx)\right| \\ &= \frac{1}{n}\,|\text{sen}(nx)| \\ &\leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{1}{n} < \epsilon \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{\epsilon} < n$$

se tiene entonces que $\forall\ \epsilon > 0$ existe $n = \dfrac{1}{\epsilon}$ tal que

$$n > \frac{1}{\epsilon} \ \Rightarrow\ \frac{1}{n} < \epsilon$$

$$\Rightarrow\ \left|\frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx) - 0\right| < \epsilon$$

y podemos concluir que la sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a la función constante 0.