Ejemplo Consideremos la Integral $\int\int_R \frac{1}{(x^2+y^2)^5+1}dxdy$ donde $R=[0,\infty)\times[0,\infty)$ y vamos a comprobar que es convergente.

Solución

$$\int\int_R \frac{1}{(x^2+y^2)^5+1}dxdy = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n\int_0^n \frac{1}{(x^2+y^2)^5+1}dxdy\right) \underbrace{=}_{Polares} \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^n \frac{r}{r^{10}+1}drd\theta\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^n \frac{r}{r^{10}+1}dr\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}\int_0^n \frac{r}{r^{10}+1}dr\right) = \frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n \frac{r}{r^{10}+1}dr\right)$$

Esta última integral la vamos a separar de la siguiente manera

$$\int_0^\infty \frac{r}{r^{10}+1}dr = \int_0^1 \frac{r}{r^{10}+1}dr + \int_1^\infty \frac{r}{r^{10}+1}dr$$

Para la integral *roja* definimos $f(r)=\frac{r}{r^{10}+1}$ la cual esta definida para todo $r\in[0,1]$ y tenemos que el valor mínimo que alcanza f en [0,1] es 0 y para ver el valor máximo de f en [0,1] vamos a derivar

$$f(r)=\frac{r}{r^{10}+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1-9r^{10}}{(r^{10}+1)^2} \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow r=\frac{1}{9^{\frac{1}{10}}} \therefore f\left(\frac{1}{9^{\frac{1}{10}}}\right)\approx \cdot 7$$

De esta manera tenemos que

$$0\le \frac{r}{r^{10}+1}\le \cdot 7 \Rightarrow 0\le \int_0^1 \frac{r}{r^{10}+1}dr \le \cdot 7$$

Por tanto el valor de la integral existe.

Para la integral *azul* tenemos que

$$\int_1^\infty \frac{r}{r^{10}+1}dr \le \int_1^\infty \frac{r}{r^{10}}dr \int_1^\infty \frac{1}{r^9}dr = \lim_{n\to\infty}\left(\int_1^n \frac{1}{r^9}dr\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{8r^8}\Big|_1^n = \frac{1}{8}$$

$\therefore$ la integral $\int\int_R \frac{1}{(x^2+y^2)^5+1}dxdy$ converge

Convergencia Uniforme

Definición 1. *Sea $f(x,y)$ una función continua en $R=[a,b]\times[c,\infty)$. Supongamos que la integral*

$$F(x)=\int_c^\infty f(x,y)dy$$

converge para cada $x\in[a,b]$.
Se dice que la integral

$$F(x)=\int_c^\infty f(x,y)dy$$

converge uniformemente en el intevalo $a \leq x \leq b$ *siempre que para un número positivo* $\epsilon > 0$, $\exists\, N = N_\epsilon$ *que no dependa de* x *y sea tal que*

$$\left| F(x) - \int_c^d f(x,y)\ dy \right| < \epsilon$$

siempre que $d \geq N_\epsilon$ $\forall\ x \in [a,b]$

Ejemplo Mostrar que la integral

$$\int_0^\infty e^{-xy}\ dy$$

converge uniformemente para $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq x_0 > 0\}$

Solución En este caso definimos

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xy}\ dy$$

y tenemos que

$$\begin{aligned}
\left| F(x) - \int_c^d f(x,y)\ dy \right| &= \left| \int_0^\infty e^{-xy}\ dy - \int_0^d e^{-xy}\ dy \right| \\
&= \left| \int_0^\infty e^{-xy}\ dy + \int_d^0 e^{-xy}\ dy \right| \\
&= \left| \int_d^\infty e^{-xy}\ dy \right| \\
&= \int_d^\infty e^{-xy}\ dy \\
&= \left. \frac{-e^{-xy}}{x} \right|_d^\infty \\
&= \frac{e^{-dx}}{x}
\end{aligned}$$

como

$$\frac{e^{-dx}}{x} \leq \frac{e^{-dx_0}}{x_0}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-dx_0}}{x_0} < \epsilon \ &\Leftrightarrow\ e^{-dx_0} < \epsilon(x_0) \\
&\Leftrightarrow\ -dx_0 < \ln(\epsilon(x_0)) \\
&\Leftrightarrow\ d > \frac{\ln(\epsilon(x_0))}{x_0}
\end{aligned}$$

por lo tanto se puede tomar $\epsilon > 0$ tal que $\forall\ d > \dfrac{\ln(\epsilon(x_0))}{x_0}$ se cumple

$$\left| \int_0^\infty e^{-xy}\ dy - \int_0^d e^{-xy}\ dy \right| < \epsilon$$

Teorema 1. ***Criterio de Cauchy.*** *La integral*

$$\int_c^\infty f(x,y)\ dy$$

converge uniformemente en $[a,b]$ *si y solo si* $\forall\ \epsilon>0$ *exite* $N_\epsilon>0$ *tal que*

$$\left|\int_{d_1}^{d_2} f(x,y)\ dy\right|<\epsilon$$

$\forall\ d_1,\ d_2>N_\epsilon$

Demostración. $(\Rightarrow)$
Suponemos que la integral converge uniformemente. Dado $\epsilon>0$, existe $N_\epsilon>0$ tal que para toda $x\in[a,b]$, $d>N_\epsilon$ se cumple

$$\left|\int_d^\infty f(x,y)\ dy\right|<\frac{\epsilon}{2}$$

entonces para $d_1,\ d_2>N_\epsilon$ se tiene

$$\begin{aligned}\left|\int_{d_1}^{d_2} f(x,y)\ dy\right| &= \left|\int_{d_1}^\infty f(x,y)\ dy-\int_{d_2}^\infty f(x,y)\ dy\right|\\ &\leq \left|\int_{d_1}^\infty f(x,y)\ dy\ \right|+\left|\int_{d_2}^\infty f(x,y)\ dy\right|\\ &< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$
Suponemos cierto el criterio de Cauchy y vamos también a suponer que la integral no converge uniformemente en $[a,b]$.
Esto es existe $2\epsilon_0>0$ tal que para algún $N_\epsilon>0$ existe $x_0\in[a,b]$ y $d_1>N_\epsilon$ tal que

$$\left|\int_{d_1}^\infty f(x_0,y)\ dy\right|\geq 2\epsilon_0$$

como $2\epsilon_0>\epsilon_0$ y

$$\lim_{k\to\infty}\left|\int_{d_1}^k f(x_0,y)\ dy\right|=\left|\int_{d_1}^\infty f(x_0,y)\ dy\right|$$

existe $d_2>d_1$ tal que

$$\begin{aligned}\left|\int_{d_1}^{d_2} f(x,y)\ dy\right| &= \left|\int_{d_1}^\infty f(x,y)\ dy-\int_{d_2}^\infty f(x,y)\ dy\right|\\ &\geq \left|\int_{d_1}^\infty f(x,y)\ dy\right|-\left|\int_{d_2}^\infty f(x,y)\ dy\right|\\ &= 2\epsilon_0-\epsilon_0=\epsilon_0\end{aligned}$$

lo cual contradice la hipótesis $\square$