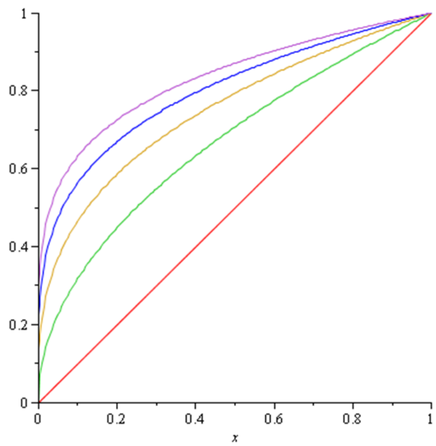
Ejemplo Sea $\{f_n\}$ la sucesión definida en $[0,1]$ por

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x}$$



En este caso

$$f_1(x) = x$$

$$f_2(x) = \sqrt{x}$$

$$f_3(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$f_4(x) = \sqrt[4]{x}$$

$$f_4(x) = \sqrt[5]{x}$$

en este caso

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$$

por otro lado

$$f_n(0) = \sqrt[n]{0} = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$$

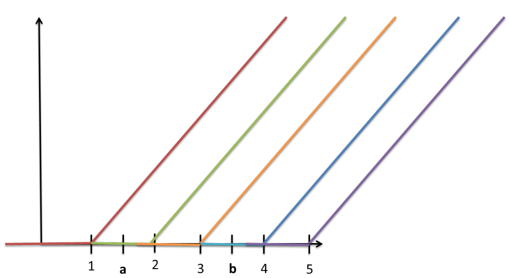
de manera que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ 1 & si \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

como el valor del límite depende de x entonces no hay convergencia uniforme.

Ejemplo Sea $\{f_n\}$ la sucesión definida en $[0,1]$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq n \\ x-n & si \quad x \geq n \end{cases}$$



$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 2 \\ x-2 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 3 \\ x-3 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 4 \\ x-4 & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

En este caso

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 1 \\ x-1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f_5(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 5 \\ x-5 & si \quad x \geq 5 \end{cases}$$

en este caso
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad en\ [a,b]$$
Además sabemos que $\forall\ a, b\ \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > b$ por lo que si $n > n_0$ entonces

$$|f_n(x) - 0| = |0 - 0| = 0 < \epsilon$$

como el valor del límite no depende de x entonces hay convergencia uniforme en $[a, b]$.

Propiedades de la Convergencia Uniforme

Propiedad 1 Supongamos que $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente en I. Si f_n es acotada en I (para cada n), demostrar que existe una constante M tal que

$$|f_n(x)| \leq M, \quad \forall\ n, \quad \forall\ x \in\ I$$

y que f es acotada en I

Demostración. Dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ se tiene

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall\ x\ \in\ I$$

es decir
$$|f_n(x)| < |f(x)| + \epsilon, \quad \forall\ x\ \in\ I$$
y también
$$|f(x)| < |f_n(x)| + \epsilon, \quad \forall\ x\ \in\ I$$
Sea M_0 una cota de f_n en I, entonces

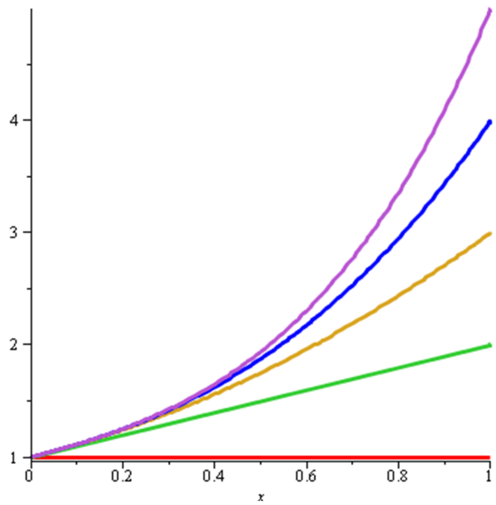
$$|f(x)| < M_0 + \epsilon, \quad \forall\ x\ \in\ I$$

ahora bien consideremos M_i una cota para f_i en I, sea

$$M = \max\{M_1, \ldots, M_0 + \epsilon\}$$

y está M es una cota para f en I □

Ejemplo Dada la sucesión $f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x}$ en $[0,1)$ se tiene



$f_1(x) = \frac{1-x}{1-x}$
$f_2(x) = \frac{1-x^2}{1-x}$
$f_3(x) = \frac{1-x^3}{1-x}$
$f_4(x) = \frac{1-x^4}{1-x}$
$f_5(x) = \frac{1-x^5}{1-x}$

Para cada n, se tiene

$$|f_n(x)| = \frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} < n$$

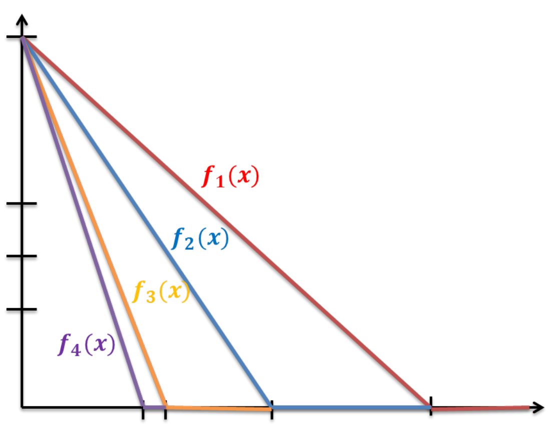
Pero

$$f_n(x) \to \frac{1}{1-x}, \quad en\ [0,1)$$

y como la función límite no es acotada en $[0,1)$, la convergencia no es uniforme

Ejemplo Sea $\{f_n\}$ la sucesión definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} -nx+1 & si \quad 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & si \quad x > \frac{1}{n} \end{cases}$$



En este caso

$$f_1(x) = \begin{cases} -x+1 & si \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -2x+1 & si \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & si \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} -3x+1 & si \quad 0 \le x \le \frac{1}{3} \\ 0 & si \quad x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} -4x+1 & si \quad 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ 0 & si \quad x > \frac{1}{4} \end{cases}$$

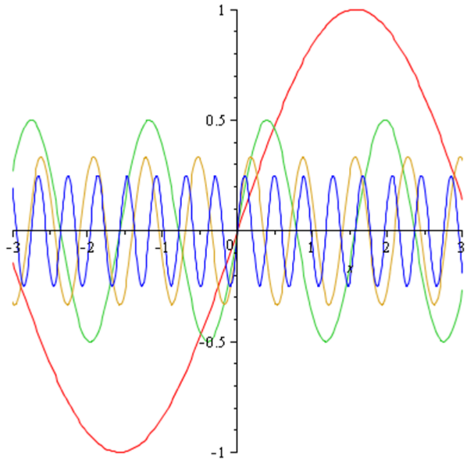
es una sucesión de funciones definida en $[0,+\infty)$ que converge puntualmente a la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x = 0 \\ 0 & si \quad x \ne 0 \end{cases}$$

Observamos que las funciones f_n son todas continuas, mientras que el limite puntual f no lo es

Ejemplo Sea $\{f_n\}$ la sucesión definida por

$$f_n(x) = \frac{\text{sen}\,(n^2 x)}{n}$$



En este caso

$f_1(x) = \text{sen } \ x$

$f_2(x) = \dfrac{\text{sen } \ 4x}{2}$

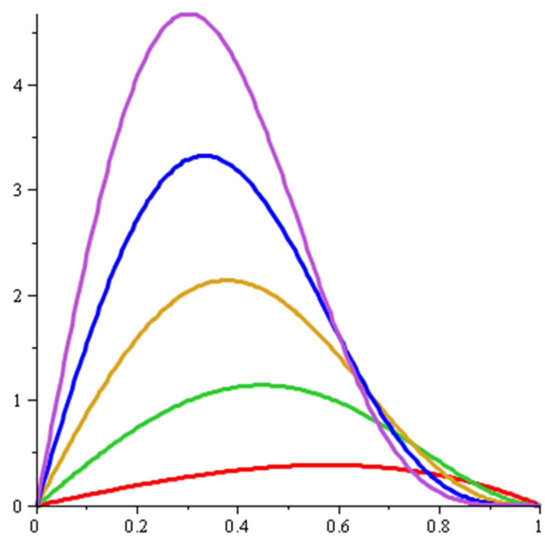
$f_3(x)\dfrac{\text{sen } \ 9x}{3}$

$f_4(x) = \dfrac{\text{sen } \ 16x}{4}$

Observamos que la sucesión de funciones converge puntualmente a la funcion cero, cada función f_n es derivable, con derivada $f_n'(x) = n\cos(n^2(x))$. La sucesión de derivadas no tiene límite finito en todos los puntos, por ejemplo no lo tiene en $x = 0$

Ejemplo Sea $\{f_n\}$ la sucesión definida en $[0, 1]$ por

$$f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$$



En este caso

$f_1(x) = x(1 - x^2)$

$f_2(x) = 2^2 x(1 - x^2)^2$

$f_3(x) = 3^2 x(1 - x^2)^3$

$f_4(x) = 4^2 x(1 - x^2)^4$

$f_5(x) = 5^2 x(1 - x^2)^5$

Observamos que

$$\lim_{n\to\infty} n^2x(1-x^2)^n = 0$$

Mientras que la sucesión de integrales

$$\int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{1}{4},\quad \int_0^1 f_2(x)\,dx = \int_0^1 4x(1-x)^2\,dx = \frac{3}{4},\quad \int_0^1 f_3(x)\,dx = \int_0^1 9x(1-x)^3\,dx = \frac{9}{8}$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \left(n^2x(1-x^2)^n\right)\ dx\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2(n+1)} = \infty$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \left(n^2x(1-x^2)^n\right)\ dx\right) \neq \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} n^2x(1-x^2)^n)\ dx$$

Teorema 1. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en $[a,b]$ entonces*
(i) Si $f_n \to f$ uniformemente en $[a,b]$, entonces f es continua
(ii)Si $f_n \to f$ uniformemente en $[a,b]$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

Demostración. Para (i) se tiene que $f_n \to f$ uniformemente en $[a,b]$ por lo que $\forall\ \epsilon > 0$ existe n_ϵ tal que si $n > n_\epsilon$ entonces

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}\quad \forall\ x \in [a,b]$$

Ahora bien como cada término $f_n(x)$ es continua en $[a,b]$ se tiene que para $x_0 \in [a,b]$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$$

por lo tanto para todo x tal que $|x - x_0| < \delta$ se tiene

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) + f_n(x_0) - f_n(x_0) - f(x_0)|\\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|\\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

por lo tanto f es continua en $[a,b]$
Para (ii) se tiene que $f_n \to f$ uniformemente en $[a,b]$ por lo que $\forall\ \epsilon > 0$ existe n_ϵ tal que si $n > n_\epsilon$ entonces

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\epsilon}{b-a}\quad \forall\ t \in [a,b]$$

y definimos $\{g_n(x)\}$ como

$$g_n(x) = \int_a^x f_n(t)\ dt \quad si\ x \in [a,b]$$

y ponemos

$$g(x) = \int_a^b f(t)\ dt$$

Vamos a probar que $g_n(x) \to g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. En este caso si $x \in [a,b]$ y $n > n_\epsilon$ se tiene

$$|g_n(x) - g(x)| = \left| \int_a^x (f_n(t) - f(t))\, dt \right| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\, dt < \int_a^x \frac{\epsilon}{b-a}\, dt = \epsilon$$

por lo que $g_n(x) \to g(x)$ □

Teorema 2. *Supóngase que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones derivables sobre $[a,b]$, y que $\{f_n'\}$ converja uniformemente sobre $[a,b]$ hacia alguna función continua g. Entonces f es derivable y*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Demostración. tenemos que

$$\begin{aligned} \int_a^x g &= \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n' \\ &= \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(a)) \\ &= f(x) - f(a) \end{aligned}$$

como g es continua, se tiene

$$f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

para todo $x \in [a,b]$ □