Teorema 1. *Criterio de Cauchy para Convergencia Uniforme de series de funciones.*
Una serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty}\{f_n\}$ *definidas en en un intervalo* I*, converge uniformemente en* I *si y solo si*

$$\forall\ \epsilon > 0, \quad exists\ n_0 \quad tal\ que\ \forall\ n > n_0, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \epsilon, \quad \forall\ x \in I$$

Demostración. (⇒) Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty}\{f_n\}$ es uniformemente convergente hacia una funcón $f(x)$ y sea $\{S_n(x)\}$ una sucesión de sumas parciales de esta serie. Se tiene entonces que

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x), \quad \forall\ x \in\ I$$

esto es $\forall\ \epsilon > 0$ existe n_0 tal que $\forall\ n > n_0$ se cumple

$$|S_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

de manera que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n+p} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \\
&= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \\
&\le |S_m - S_n| \\
&= |S_m - f(x) + f(x) - S_n| \\
&\le |S_m - f(x)| + |f(x) - S_n| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

(⇐) Supongamos que dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $\forall\ n > n_0$ se cumple

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \epsilon$$

Sean $m, n > n_0$. Sin perdida de generalidad asumimos que $m > n$ y $m = n + p$ para alguna $p \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces

$$|S_m - S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \epsilon$$

por lo que la sucesión de funciones $\{S_n(x)\}$ converge uniformemente por el criterio de Cauchy para sucesiones de funciones, por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniformemente □

Ejemplo Dada la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

vamos a comprobar usando el criterio de Cauchy para series de funciones que converge uniformemente, en este caso se tiene

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{k(1+kx^2)}$$

por lo que

$$|S_m(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{m} \frac{x}{k(1+kx^2)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{k(1+kx^2)}) \right|$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{x}{k(1+kx^2)} \right|$$

Ahora bien

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{x}{k(1+kx^2)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \left| \frac{x}{k(1+kx^2)} \right|$$

Por otro lado

$$\left| \frac{x}{k(1+kx^2)} \right| \leq \left| \frac{x}{k(kx^2)} \right| = \left| \frac{1}{k(1+kx)} \right| \underbrace{\leq}_{x\in[1,\infty)} \frac{1}{n^2}$$

si hacemos $\dfrac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{m-(n+1)}} < n$ se tiene que

$$\frac{1}{n^2} < \frac{\epsilon}{m-(n+1)}$$

y llamamos $n_0 = \dfrac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{m-(n+1)}}$, se tiene que para $n > n_0$

$$\sum_{k=n+1}^{m} \left| \frac{x}{k(1+kx^2)} \right| < \underbrace{\frac{\epsilon}{m-(n+1)} + \cdots \frac{\epsilon}{m-(n+1)}}_{m-(n+1)\ términos} = \epsilon$$

y por lo tanto

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{x}{k(1+kx^2)} \right| < \epsilon$$

y en consecuencia por el criterio de Cauchy la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

converge uniformente para $x \in\ [1,\infty)$

Teorema 2. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *uniformemente convergente hacia* f *sobre* $[a,b]$*. Si cada* f_n *es continua sobre* $[a,b]$*, entonces* f *es continua sobre* $[a,b]$

Demostración. Si cada f_n es continua, entonces también lo es $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ y f es la función límite de la sucesión

$$f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3, ...,$$

por lo que según el teorema anterior f debe ser continua. $\square$

Teorema 3. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *uniformemente convergente hacia* f *sobre* $[a,b]$*. Si* f *y cada* f_n *son integrables sobre* $[a,b]$*, entonces*

$$\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$$

Demostración. Puesto que $f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3, ...,$ converge uniformemente hacia f, se tiene

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 + \cdots + \int_a^b f_n \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$$

$\square$

Teorema 4. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *uniformemente convergente hacia alguna función continua* f *sobre* $[a,b]$*, y si* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge (puntualmente) hacia* f *sobre* $[a,b]$ *entonces*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n', \quad \forall\ x \in [a,b]$$

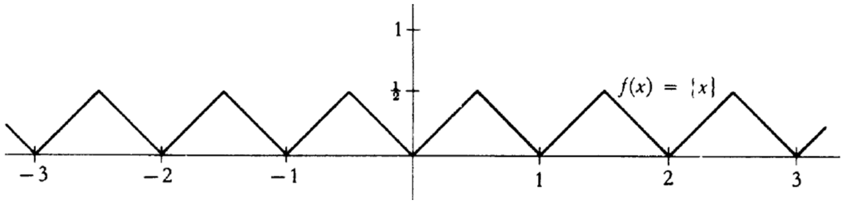
Demostración. Como cada función $f_1 + \ldots + f_n$ es derivable, con derivada $f_1' + \ldots + f_n'$ y $f_1', f_1' + f_2', f_1' + f_2' + f_3', ...,$ converge por hipótesis uniformemente hacia una función continua. Se tiene

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} [f_1' + \ldots + f_n']$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$$

$\square$

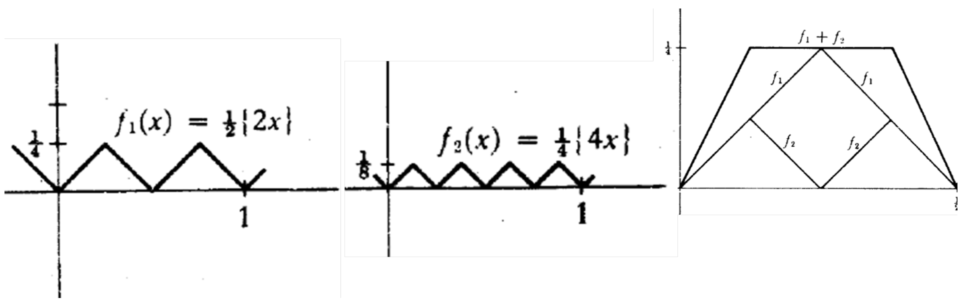
Ejemplo Sea $\{x\}$ la distancia al entero mas próximo (la gráfica $f(x)=\{x\}$) se puede ver



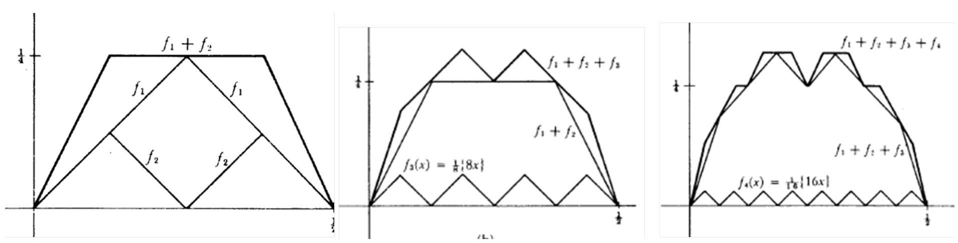
Definimos ahora

$$f_n(x)=\frac{1}{2^n}\{2^n x\}$$

un ejemplo de como pueden verse $f_1,\ f_2$ y f_1+f_2 se puede ver



y la gráfica para f_1+f_2, $f_1+f_2+f_3$ y $f_1+f_2+f_3+f_4$ se verian mas o menos asi



Vamos a considerar ahora la sucesión de funciones

$$f_n(x)=\frac{1}{10^n}\{10^n x\}$$

y en este caso se tiene que

$$|f_n(x)|\leq\frac{1}{10^n},\quad\forall\ x\in\ I$$

por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}\{10^n x\}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}$$

donde esta última converge. Por lo que según el criterio M de Weierstrass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}\{10^n x\}$$

converge uniformemente y al ser cada $f_n(x)$ continua, se tiene entonces que la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}\{10^n x\}$$

es también continua.
Vamos a ver que la función límite no es derivable en ningún punto. para ello consideraremos una sucesión $\{h_m\}$ que tienda a cero, para la cual

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}$$

no existe.
Si $0 < a \leq 1$ consideramos su desarrollo decimal

$$a = 0.a_1 a_2 a_3 \ldots a_m \ldots$$

hacemos

$$h_m = \begin{cases} 10^{-m} & si \quad a_m \neq \ 4 \text{ ó } 9 \\ -10^{-m} & si \quad a_m = \ 4 \text{ ó } 9 \end{cases}$$

nos vamos a fijar en la derivada en el punto a, tenemos entonces que

$$\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \frac{\{10^n(a+h_m)\} - \{10^n a\}}{\pm 10^{-m}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 10^{m-n} \left(\{10^n(a+h_m)\} - \{10^n a\}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 10^{m-n} \left(\{10^n a + 10^n h_m\} - \{10^n a\}\right)$$

$$\underbrace{=}_{n>m \ \Rightarrow \ 10^n(\pm\ 10^{-m})\in\mathbb{Z}} \sum_{n=1}^{\infty} 10^{m-n} \left(\{10^n a + \cancel{10^n(\pm\ 10^{-m})}\} - \{10^n a\}\right)$$

$$= 0$$

Por otra parte si $n < m$ se tiene que

$$\begin{array}{rllllll} & .a_1 & a_2 & \ldots & a_m \ldots = & & a \\ + & & & & & & \\ & ,0 & 0 & \ldots & \pm 1 \ldots = & & h_m \\ \hline & 0.a_1 & a_2 & \ldots & a_m \pm 1 \ldots = & & a+h_m \end{array} \tag{1}$$

por lo que el término $10^n(a+h_m)$ se puede escribir

$$10^n(a+h_m) = entero\ +\ 0.a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\ldots\ a_m \pm\ 1\ldots$$

y el término $10^n a$ se puede escribir

$$10^n a = entero\ +\ 0.a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\ldots\ a_m \ldots$$

suponiendo que

$$0.a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\ldots\ a_m \ldots \leq \frac{1}{2}$$

se tiene entonces

$$0.a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\ldots\ a_m \pm\ 1\ldots \leq \frac{1}{2}$$

en cuyo caso

$$\{10^n(a+h_m)\} - \{10^n a\} = \pm\ 10^{n-m}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} 10^{m-n}\left(\{10^n(a+h_m)\} - \{10^n a\}\right) &= 10^{m-n}\left(\pm\ 10^{n-m}\right) \\ &= \pm\ 1 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}$$

es la suma de números que son 1 ó -1 y en consecuencia la sucesión de cocientes no puede converger, la gráfica se ve mas o menos asi