Campos Solenoides

Considere el campo

$$F = -\frac{GmM\mathbf{r}}{r^3}$$

definido en $\mathbb{R}^3 - \{\hat{0}\}$.
Una masa M situada en el origen de $\mathbb{R}^3$ ejerce una fuerza de magnitud

$$\frac{GmM}{r^3}$$

dirigida hacia el origen sobre una masa m colocada en el punto $\mathbf{r}$=(x,y,z).
G es una constante gravitatoria cuyo valor depende de las unidades de medida y

$$r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Si $-\frac{\mathbf{r}}{r}$ es el vector unitario dirigido hacia el origen, entonces podemos escribir el campo de fuerzas

$$F(x,y,z) = -\frac{GmM\mathbf{r}}{r^3}$$

Ejercicio Calcule la divergencia de

$$F(x,y,z) = -\frac{GmM\mathbf{r}}{r^3}$$

Solución En este caso

$$\begin{aligned} div\left(-\frac{GmM\mathbf{r}}{r^3}\right) &= -GmMdiv\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) \\ &= div\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= \frac{x^2+y^2+z^2-3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{x^2+y^2+z^2-3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{x^2+y^2+z^2-3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicio Calcule el rotacional de

$$F(x,y,z) = -\frac{GmM\mathbf{r}}{r^3}$$

en este caso

$$rot\ F = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right), -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right), \right.$$
$$\left., \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\right)$$

$$\left(\frac{-3zy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{3zy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\frac{-3zx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{3zx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\frac{-3yx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right)$$
$$=(0,0,0)$$

Ahora consideremos una esfera S con centro en el origen y radio $r>0$ la cual podemos parametrizar

$$\phi(u,v)=(r\cos\ u\,\text{sen}\ v, r\,\text{sen}\ u\,\text{sen}\ v, r\cos\ v)$$

donde $u\in[0,2\pi]$, $v\in[0,\pi]$ por lo que

$$\int\int_S F(\phi(u,v))\cdot N\ ds$$

$$=-GmM\int\int_S\left(\frac{}{r^2}\right)(\cos\ u\,\text{sen}\ v,\text{sen}\ u\,\text{sen}\ v,\cos\ v)\cdot(-r^2\,\text{sen}\ v(\cos\ u\,\text{sen}\ v,\text{sen}\ u\,\text{sen}\ v,\cos\ v))\,ds$$

$$=-GmM\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}-\text{sen}\ v\ dv\ du$$
$$=-GmM(-4\pi)$$

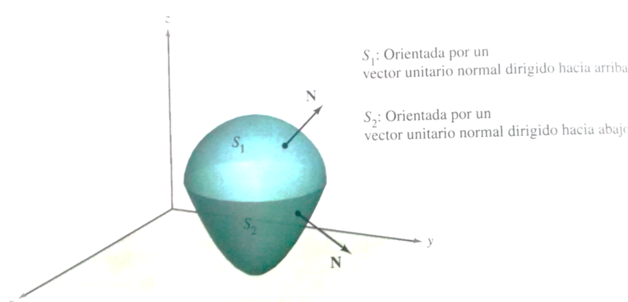
Ahora bien, ya vimos que $div\ F=0$ por lo que si existiera un campo G tal que $rot\ G=F$ se tendría

$$\int\int_S G\cdot N\ ds=\int\int_S rot\ F\cdot N\ ds=0$$

lo cual no puede ocurrir, por lo que no puede existir un campo G tal que $rot\ G=F$, por lo que la condición $div\ F=0$ es necesaria pero no suficente, es decir no todo campo que cumpla $div\ F=0$ es campo solenoidal.

Teorema de la Divergencia

Teorema 1. *Sea W una región sólida limitada o acotada por una superficie cerrada $S=Fr(W)$, orientada por un vector unitario normal dirigido hacia el exterior de W. si F es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en Q entonces*



$$\int\int_S F\cdot N\ dA=\int\int\int_W div\ F\ dv$$

Funciones Armónicas

Definición 1. *Se dice que una función f(x,y,z) es armónica en una región D en el espacio, si satisface*

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0$$

en toda D.

Ejercicio Suponga que f es una función armónica en toda una región D acotada y encerrada por una superficie suave S, y que N es el vector normal unitario escogido sobre S. Demuestre que

$$a) \quad \int\int_S \nabla f \cdot N \; dA = 0, \qquad b) \quad \int\int_S f\nabla f \cdot N \; dA = \int\int\int \|\nabla f\|^2 dV$$

Solución a) Por el teorema de la divergencia

$$\int\int_S \nabla f \cdot N \; dA = \int\int\int_D \nabla \cdot \nabla f \; dV = \int\int\int_D \nabla^2 f \; dV = \int\int\int_D 0 \; dV = 0$$

Solución b) Por el teorema de la divergencia

$$\int\int_S f\nabla f \cdot N \; dA = \int\int\int_D \nabla \cdot f\nabla f \; dV$$

ahora bien

$$f\nabla f = \left(f\frac{\partial f}{\partial x}, f\frac{\partial f}{\partial y}, f\frac{\partial f}{\partial z} \right) \;\Rightarrow\; \nabla \cdot f\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(f\frac{\partial f}{\partial x}, f\frac{\partial f}{\partial y}, f\frac{\partial f}{\partial z} \right) =$$

$$f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + f\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = f\nabla^2 f + \|\nabla f\|^2$$

por lo tanto

$$\int\int_S f\nabla f \cdot N \; dA = \int\int\int_D \nabla \cdot f\nabla f \; dV = \int\int\int_D f\nabla^2 f + \|\nabla f\|^2 \; dV \underbrace{=}_{f\ armonica} \int\int\int_D \|\nabla f\|^2 \; dv$$

Identidades de Green

Ejercicio Suponga que f y g son funciones escalares con primeras y segundas derivadas parciales continuas en toda una región Q cerrada y acotada por una superficie S suave, y que $\frac{\partial f}{\partial N}$, $\frac{\partial g}{\partial N}$ indican las derivadas direccionales de f y g respectivamente en dirección de la normal unitaria exterior N a una superficie cerrada S. esto es

$$\frac{\partial f}{\partial N} = \nabla \; f \cdot N, \quad \frac{\partial g}{\partial N} = \nabla \; g \cdot N$$

Demuestre que

$$\int\int_S \frac{\partial f}{\partial N} \; ds = \int\int\int_Q \nabla^2 f \; dv$$

Demostración. En este caso se tiene

$$\int\int_S \frac{\partial f}{\partial N}\ ds = \int\int_S \nabla\ f \cdot N\ ds$$
$$\underbrace{=}_{\substack{Teorema+de\ la\\ Divergencia}} \int\int\int_Q div(\nabla\ f)$$
$$= \int\int\int_Q \nabla^2 f\ dv$$

□

Ejercicio Demuestre que

$$\int\int_S \frac{\partial f}{\partial N}\ ds = 0, \quad \textit{siempre que } f \textit{ sea armónica}$$

Demostración. En este caso se tiene

$$\int\int_S \frac{\partial f}{\partial N}\ ds = \int\int_S \nabla\ f \cdot N\ ds$$
$$\underbrace{=}_{\substack{Teorema+de\ la\\ Divergencia}} \int\int\int_Q div(\nabla\ f)$$
$$= \int\int\int_Q \nabla^2 f\ dv$$
$$\underbrace{=}_{f\ armónica} \int\int\int_Q 0\ dv = 0$$

□

Teorema 2. *Primera fórmula de Green Suponga que f y g son funciones escalares con primeras y segundas derivadas parciales continuas en toda una región Q cerrada y acotada por una superficie S suave. Se tiene entonces que*

$$\int\int_D (f\nabla g)\cdot N\ dA = \int\int\int_Q \left(f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g\right) dV$$

Demostración. Por el teorema de la divergencia

$$\int\int_D f\nabla g\cdot N\ dA = \int\int\int_Q div\ (f\nabla g)\ dV = \int\int\int_Q \nabla\cdot(f\nabla g)\ dV = \int\int\int_Q \nabla\cdot\left(f\frac{\partial g}{\partial x}, f\frac{\partial g}{\partial y}, f\frac{\partial g}{\partial z}\right) dV$$

$$= \int\int\int_Q \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot\left(f\frac{\partial g}{\partial x}, f\frac{\partial g}{\partial y}, f\frac{\partial g}{\partial z}\right) dV = \int\int\int_Q \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial g}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(f\frac{\partial g}{\partial z}\right)\right) dV =$$

$$\int\int\int_Q \left(f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + f\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} + f\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}\right) dV =$$

$$\int\int\int_Q \left(f\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}\right)\right) dV=\int\int\int_Q \left(f\nabla^2 g+\nabla f\cdot\nabla g\right)$$

□

Teorema 3. *Segunda fórmula de Green Si f y g son funciones continuamente diferenciables de clase C^2, entonces*

$$\int\int_D (f\nabla g-g\nabla f)\cdot N\ dA=\int\int\int_Q (f\nabla^2 g-g\nabla^2 f)\ dV$$

Demostración. Según el teorema anterior

$$\int\int_D (f\nabla g)\cdot N\ dA=\int\int\int_Q \left(f\nabla^2 g+\nabla f\cdot\nabla g\right) dV$$

si intercambiamos las funciones f y g

$$\int\int_D (g\nabla f)\cdot N\ dA=\int\int\int_Q \left(g\nabla^2 f+\nabla g\cdot\nabla f\right) dV$$

A la primera expresión le restamos la segunda

$$\int\int_D (f\nabla g\cdot N-g\nabla f)\cdot N\ dA=\int\int\int_Q \left(f\nabla^2 g+\nabla f\cdot\nabla g-(g\nabla^2 f+\nabla g\cdot\nabla f)\right) dV=\int\int\int_Q \left(f\nabla^2 g-(g\nabla^2 f)\right) dV$$

□

Ejercicio Suponga que f y g son funciones escalares con primeras y segundas derivadas parciales continuas en toda una región Q cerrada y acotada por una superficie S suave, y que $\frac{\partial f}{\partial N}$, $\frac{\partial g}{\partial N}$ indican las derivadas direccionales de f y g respectivamente en dirección de la normal unitaria exterior N a una superficie cerrada S. esto es

$$\frac{\partial f}{\partial N}=\nabla\ f\cdot N,\quad \frac{\partial g}{\partial N}=\nabla\ g\cdot N$$

Demuestre que

$$\int\int_S f\frac{\partial g}{\partial N}\ ds=\int\int_S g\frac{\partial f}{\partial N}\ ds,\quad si\quad f\ y\ g\ son\ ambas\ arm\acute{o}nicas$$

Demostración. En este caso

$$\int\int_S f\frac{\partial g}{\partial N}\ ds=\int\int_S f\nabla\ g\cdot N\ ds$$

$$\underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ la\\ Divergencia}}\int\int\int_Q (f\nabla^2 g+\nabla\ f\cdot\nabla\ g)\ dv$$

$$\underbrace{=}_{g\ arm\acute{o}nica}\int\int\int_Q \nabla\ f\cdot\nabla\ g\ dv$$

$$\underbrace{=}_{\substack{conmutatividad\\producto\ punto}} \int\int\int_Q \nabla\ g \cdot \nabla\ f\ dv$$

$$\underbrace{=}_{f\ armónica} \int\int\int_Q (g\nabla^2 f + \nabla\ g \cdot \nabla\ f)\ dv$$

$$\int\int_S g\frac{\partial f}{\partial N}\ ds$$

□

Ejercicio Demuestre que

$$\nabla^2 f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{|V(t)|}\int\int_{S(t)} \frac{\partial f}{\partial N}\ ds$$

donde $V(t)$ es una esfera de radio t y centro a, $S(t)$ la superficie de $V(t)$ y $|V(t)|$ es el volumen de $V(t)$

Solución En este caso

$$\int\int_{S(t)} \frac{\partial f}{\partial N}\ ds = \int\int_{S(t)} \nabla\ f \cdot\ N\ ds$$

$$\underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ la\\Divergencia}} \int\int\int_{w(t)} div\ (\nabla\ f)\ dv$$

$$= \int\int\int_{w(t)} \nabla^2 f\ dv$$

$$\underbrace{=}_{\substack{Teorema\ del\ valor\\promedio}} \nabla^2 f(\hat{x}_0)\ vol(w(t))$$

por lo tanto

$$\int\int_{S(t)} \frac{\partial f}{\partial N}\ ds\ = \nabla^2 f(\hat{x}_0)\ vol(w(t))$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{vol(w(t))}\int\int_{S(t)} \frac{\partial f}{\partial N}\ ds = \nabla^2 f(\hat{x}_0)$$

en consecuencia

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{vol(w(t))}\int\int_{S(t)} \frac{\partial f}{\partial N}\ ds = \nabla^2 f(a)$$

Ejercicio Sea W una región en $\mathbb{R}^3$ cuya frontera es una superficie cerrada S y N la normal unitaria exterior a S. Sean F y G dos campos vectoriales derivables con continuidad tales que

$$rot\ F = rot\ G, \quad div\ F = div\ G, \quad G \cdot\ N = F \cdot\ N$$

en toda la superficie. Demostrar que $F = G$ en todo W

Solución Se tiene que

$$rot\ F = rot\ G \ \Rightarrow\ rot\ F - rot\ G = 0\ \Rightarrow\ rot(F-G) = 0$$

también

$$div\ F = div\ G\ \Rightarrow\ div\ F - div\ G = 0\ \Rightarrow\ div(F-G) = 0$$

de lo anterior se tiene que existe un campo escalar φ tal que $F - G = \nabla\varphi$
Por otro lado

$$\begin{aligned}\int\int\int_W \|\nabla\varphi\|^2\ dv &= \int\int_S \varphi\ \nabla\ \varphi\cdot N\ ds\\ &= \int\int_S \varphi(F-G)\cdot N\ ds\\ &= \int\int_S (\varphi\ F\cdot N - \varphi\ G\cdot N)\ ds\\ &= \int\int_S 0\ ds = 0\end{aligned}$$

de donde se deduce $\|\nabla\varphi\|^2 = 0$ y por tanto $\|\nabla\varphi\| = 0$ es decir $\nabla\varphi = 0$ en consecuencia $F - G = 0$ y $F = G$

Ejercicio Un campo escalar φ tiene la propiedad

$$\|\nabla\varphi\|^2 = 4\varphi,\quad div\ (\varphi\ \nabla\ \varphi) = 10\varphi$$

Calcular la integral de superficie

$$\int\int_S \frac{\partial\varphi}{\partial N}\ ds$$

donde S es la superficie de la esfera unitaria con centro en el origen, y $\dfrac{\partial\varphi}{\partial N}$ es la derivada direccional de φ en la dirección de la normal unitaria exterior S.

Solución En este caso

$$\begin{aligned}\int\int_S \frac{\partial\varphi}{\partial N}\ ds &= \int\int_S \nabla\ \varphi\cdot\ N\ ds\\ \underbrace{=}_{\substack{Teorema de la\\ Divergencia}} &\int\int\int_W div\ (\nabla\ \varphi)\ dv\\ &= \int\int\int_W div\ \nabla^2\varphi\ dv\end{aligned}$$

Sabemos que $div\ (\varphi\ \nabla\ \varphi) = \varphi\triangle\ \varphi + \|\nabla\ \varphi\|^2$ por lo que según las hipótesis

$$10\ \varphi = \varphi\triangle\ \varphi + 4\ \varphi$$

$$\Rightarrow\ \triangle\ \varphi = 6$$

de manera que

$$\begin{aligned}\int\int\int_W div\ \nabla^2\varphi\ dv &= \int\int\int_W 6\ dv\\ &= 6\int\int\int_W\ dv\\ &= 6\left(\frac{4\pi}{3}\right)\\ &= 8\pi\end{aligned}$$