# Integrales Impropias sobre regiones no acotadas

Surge un tipo diferente de integral cuando el integrando f es continuo pero la región de integración se extiende hasta el infinito.
Considerese un conjunto no acotado R en el que la función f es continua. Los subconjuntos

$$R_1 \subset R_2 \subset \cdots \subset R$$

donde los subconjuntos cerrado y acotados $R_n$ forman una sucesión monotona creciente.
Si el límite

$$\lim_{n\to\infty} \int\int_{R_n} f(x,y)\ dx\ dy$$

existe y es independiente de la elección particular de la sucesión de subconjuntos $R_n$ recibirá el nombre de integral de f sobre R y se le denotará

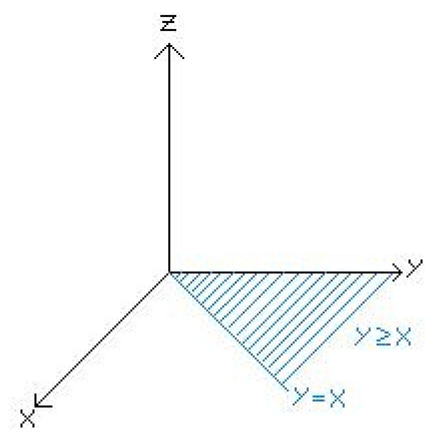
$$\int\int_{R} f\ dx\ dy$$

La integral impropia de f sobre el conjunto no acotado R existe si, para una sucesión particular $R_n$, las integrales de $|f|$ sobre los $R_n$ son acotadas uniformemente en n, digamos si

$$\int\int_{R_n} |f|\ dx\ dy \leq \mu$$

para todo n.

**Ejemplo** Evaluar la integral doble impropia $\displaystyle\int\int_{R} \frac{y}{(1+y^2)^2} dA$ donde $R$ es el conjunto $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < \infty,\ x \leq y < \infty\right\}$




**Solución** Vamos a considerar los subconjuntos $R_n$ de la siguiente manera

$$R_{m,n} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq m,\ x \leq y \leq n\}$$

y tenemos entonces que

$$\int\int_{R_{m,n}} f = \lim_{m,n\to\infty}\int_0^m \int_x^n \frac{y}{(1+y^2)^2}\ dy\ dx$$

$= \lim\limits_{m\to\infty}\int_o^m \lim\limits_{n\to\infty}\int_x^n \frac{y}{(1+y^2)^2}dydx = \lim\limits_{m\to\infty}\int_0^n \lim\limits_{m\to\infty} \frac{-1}{2(1+y^2)}\Big|_0^n\ dx =$
$\lim\limits_{m\to\infty}\int_0^n \lim\limits_{m\to\infty}\left[\frac{-1}{2(1+n^2)}+\frac{1}{2(1+x^2)}\right]dx = \lim\limits_{m\to\infty}\int_0^m \frac{1}{2(x^2+1)}dx = \frac{1}{2}\lim\limits_{m\to\infty}\arctan x\Big|_0^m =$
$\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\arctan m - \arctan 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

**Teorema 1.** *Criterio de comparación para integrales múltiples de integrando positivo*

$$Si \quad 0 \le f(x,y) \le g(x,y) \quad \forall (x,y)\in D$$

$$\int\int_D g(x,y)dxdy \quad converge \Rightarrow \int\int_D f(x,y)dxdy \quad converge$$

*Demostración.* Ejercicio de la tarea 4 □

Analogamente se demuetra que

$$Si \quad 0 \le f(x,y) \le g(x,y) \quad \forall (x,y)\in D$$

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \quad diverge \Rightarrow \int\int_D g(x,y)dxdy \quad diverge$$

Aplicando el criterio de comparación comprobar si la integral $\int\int_D \left|\frac{y-x}{(x+y+1)((x^2+y^2)^5+1)}\right|$ en $D=[0,\infty)\times[0,\infty)$ converge.

Tenemos que

$$\left|\frac{y-x}{(x+y+1)((x^2+y^2)^5+1)}\right| \le \frac{|y-x|}{|x+y+1||(x^2+y^2)^5+1|} \le \frac{|y|+|x|}{|x+y+1||(x^2+y^2)^5+1|}$$

$$\le \frac{1}{(x^2+y^2)^5+1}$$

$\therefore$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \left|\frac{y-x}{(x+y+1)((x^2+y^2)^5+1)}\right| \le \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{((x^2+y^2)^5+1)}dxdy$$

esta última es convergente $\therefore$ la integral pedida es convergente. Aplicando el criterio de comparación comprobar si la integral $\int\int_D \left|\frac{y-x}{(x+y+1)((x^2+y^2)^5+1)}\right|$ en $D=[0,\infty)\times[0,\infty)$ converge. Tenemos que

$$\left|\frac{y-x}{(x+y+1)((x^2+y^2)^5+1)}\right| \le \frac{|y-x|}{|x+y+1||(x^2+y^2)^5+1|} \le \frac{|y|+|x|}{|x+y+1||(x^2+y^2)^5+1|}$$

$$\le \frac{1}{(x^2+y^2)^5+1}$$

$\therefore$
$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left|\frac{y-x}{(x+y+1)((x^2+y^2)^5+1)}\right| \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{((x^2+y^2)^5+1)}dxdy$$
esta última es convergente $\therefore$ la integral pedida es convergente.

**Ejemplo** Ejemplo.- Evaluar la integral
$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2}dxdy$$
tenemos que en este caso hacemos un cambio de coordenadas polares $x = r\cdot\cos(\theta)$ , $y = r\cdot \text{sen}(\theta)$ donde $0 \leq r \leq n$ y $0 \leq \theta \leq 2\cdot\pi$ por tanto
$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^n e^{-r^2}rdrd\theta = \lim_{n\to\infty} 2\pi\int_0^n e^{-r^2}rdrd\theta = -\lim_{n\to\infty}\pi\left(1-e^{-n^2}\right) = \pi$$
Por otro lado
$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx\cdot\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}dy = \left[\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx\right]^2$$
$\therefore$
$$\left[\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx\right]^2 = \pi \Rightarrow \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \quad e^{-x^2} \quad es \quad par \Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
Usaremos lo anterior para evaluar la integral
$$\int_0^\infty e^{-t^2}\cos(xt)dt$$
Tenemos que
$$\left|e^{-t^2}\cos(xt)\right| \leq e^{-t^2} \quad \therefore \int_0^\infty e^{-t^2}\cos(xt)dt \quad converge$$
Derivando bajo el signo de integral tenemos
$$f(x) = \int_0^\infty e^{-t^2}\cos(xt)dt \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty e^{-t^2}\cos(xt)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-t^2}\cos(xt)\right)dt = -\int_0^\infty te^{-t^2}\text{sen}(xt)dt$$
$$\underbrace{=}_{u=\text{sen}(xt) \quad du=x\cos(xt)dt \quad dv=te^{-t^2} \quad v=\frac{-e^{-t^2}}{2}} -\left(\frac{-e^{-t^2}}{2}\cdot\text{sen}(xt)\left.\right|_0^\infty - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{-e^{-t^2}}{2}\cdot x\cos(xt)dt\right) =$$
$$-\frac{x}{2}\int_0^\infty e^{-t^2}\cos(xt)dt \Rightarrow f'(x) = -\frac{x}{2}f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x}{2} \Rightarrow \log(f(x)) = -\frac{x^2}{4}+C_0 \Rightarrow f(x) = Ce^{-\frac{x^2}{4}}$$
como
$$f(0) = \int_0^\infty e^{-t^2}\cos(0t)dt = \int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
entonces
$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$$