Integral de funciones escalares sobre curvas paramétricas

Definición 1. *Una función $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es suave por pedazos si existe una partición*

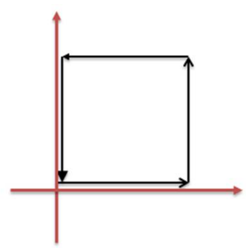
$$P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}$$

del intervalo [a,b] tal que α tiene derivada continua (de clase C^1) en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ para $(i = 1, ..., k)$. A la imagen $\Gamma = \alpha([a, b])$ de una función α suave por pedazos la llamaremos curva suave por pedazos y diremos que α es una parametrización suave por pedazos de Γ. A $\alpha(a)$ lo llamaremos punto final y a $\alpha(b)$ punrto final, y si $\alpha(a) = \alpha(b)$ decimos que α es cerrada

Ejemplo Parametrizar la curva que une los puntos en el plano $(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0)$.

Solución Una parametrización (suave por pedazos) para esta curva puede ser la función $\alpha : [0, 4] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0) & si \quad 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t-1) & si \quad 1 \leq t \leq 2 \\ (3-t, 1) & si \quad 2 \leq t \leq 3 \\ (0, 4-t) & si \quad 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$



Supongamos ahora que $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una parametrización inyectiva y de clase C^1 de esta curva. Un metodo para aproximar a la longitud de la curva Γ consiste en tomar un número finito de puntos de ésta (empezando y terminando en los puntos inicial y final), digamos $P_0, ..., P_k \in \Gamma$, y calcular la longitud entre cada dos consecutivos, es decir $\|P_i - P_{i-1}\|$. De esta forma, la suma de todos estos números

$$\sum_{i=1}^{k} \|P_i - P_{i-1}\|$$

es una aproximación a la longitud de la curva, y ésta será mejor si tomamos más puntos y más cercanos entre sí

Dado que estamos suponiendo que α es una parametrización inyectiva de Γ, existe una única partición $P = \{t_0, ..., t_k\}$ del intervalo $[a, b]$ tal que $P_i = \alpha(t_i)$, y por lo tanto tenemos que

$$\sum_{i=1}^{k} \|P_i - P_{i-1}\| = \sum_{i=1}^{k} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{k} \|\alpha'(t_i)(t_i - t_{i-1})\|$$

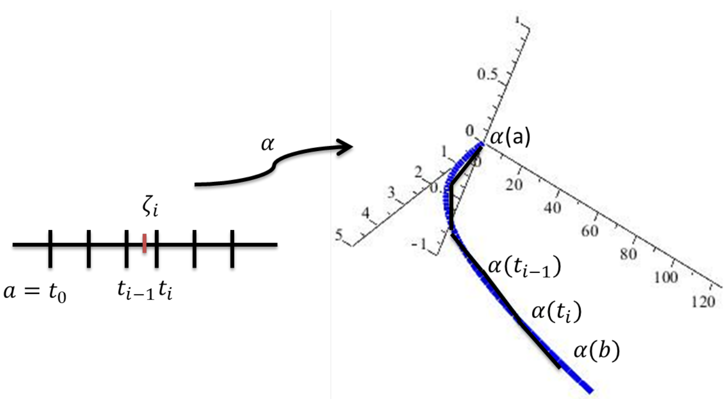
$$= \sum_{i=1}^{k} \|\alpha'(t_i)\| |(t_i - t_{i-1})|$$

esta ultima es una suma de Riemann correspondiente a la integral

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Integral de Trayectoria (Área)

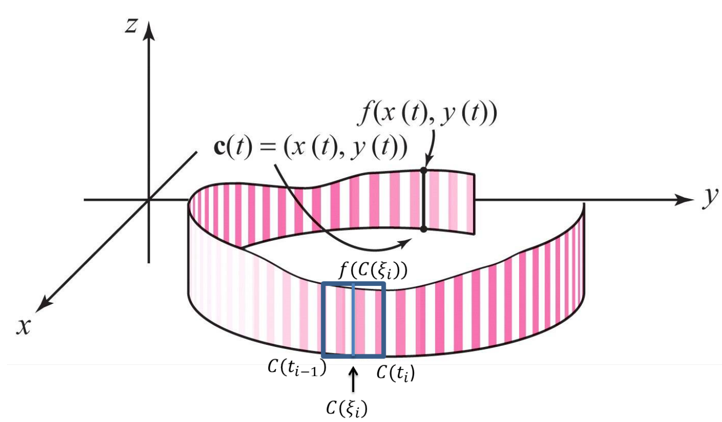
Cónsiderese la trayectoria $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ que tiene primera derivada continua en el intervalo $[a, b]$, y sea $P = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Esta partición determina una poligonal de n lados cuyos vértices están sobre la trayectoria c



La longitud del segmento que une los puntos $c(t_{i-1})$ y $c(t_i)$, esta dado por $\|c(t_i) - c(t_{i-1})\|$, y por el teorema del valor medio

$$\|c(t_i) - c(t_{i-1})\| = \|c'(\zeta *)(c(t_i) - c(t_{i-1})\| = \|{}^{;}_{,}(\zeta *)\|\triangle_{t_i}$$

Considérese además una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua. Ahora supóngase que se tiene una barda cuya base tiene la forma de una curva $c(t) = (x(t), y(t))$ y cuya altura $f(x(t), y(t))$. La integral $\int_c f ds$ representa el área de un lado de la barda.



Notese que el área A_i del rectángulo R_i se calcula

$$A_i = f(\xi_i) \cdot \|(c(t_i) - c(t_{i-1})\| = f(\xi_i) \cdot \|c'(\zeta*)\| \triangle_{t_i}$$

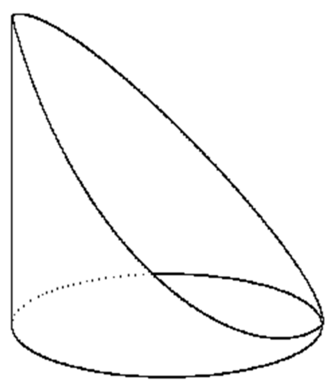
entonces el área A bajo f y sobre la trayectoria c, se aproxima

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \|c'(\zeta*)\| \triangle_{t_i}$$

por lo tanto

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \|c'(\zeta*)(c(t_i) - c(t_{i-1})\| = \int_a^b f(c(t))\|c'(t)\|dt$$

Ejemplo Considere una barda circular (de radio 1) cuya altura en cada punto está dada por la función $f(x, y) = 1 - y$. Calcular el área de la barda



Solución En este caso el área que se quiere calcular, coincide con ser la mitad del área de un cilindro de base circular (de radio 1) y altura 2 (perímetro de la base $2\pi \times altura 2 = 4\pi$)
La base se puede parametrizar con la función

$$\alpha(t) = (\cos\ t,\ \ \text{sen}\ \ t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

por lo tanto

$$\alpha'(t) = (-\,\text{sen}\ \ t, \cos\ t)$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\|\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \text{sen}\ \ t)\ dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Ejemplo Vamos a calcular las siguientes integrales de trayectoria

a) Sea $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ y $f(x, y) = x + y$

Sol.

Tenemos que

$f(\alpha(t)) = \cos(t) + \sin(t)$

por otro lado

$\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-\cos(t))^2 + (\sin(t))^2} = 1 \therefore$

$$\int_c f = \int_c f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) + \sin(t)dt = \sin(t) - \cos(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

Ejemplo b) Sea $\beta(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ con $t \in [0, 1]$ y $f(x, y) = x + y$

Sol.

Tenemos que

$f(\beta(t)) = t + \sqrt{1-t^2}$

por otro lado $\beta'(t) = \left(1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right) \Rightarrow \|\beta'(t)\| = \sqrt{(1)^2 + (\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}})^2} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \therefore$

$$\int_c f = \int_c f(\beta(t))\|\beta'(t)\|dt = \int_0^1 \left(t + \sqrt{1-t^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt = \int_0^1 \left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} + 1\right)dt =$$

$$-\sqrt{1-t^2} + t\,\Big|_0^1 = 2$$

$\therefore$ El valor de la integral no depende de la parametrización

Proposición 1. *Sean 2 curvas de clase* c^1 $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\beta : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ *y sea el campo* $f : u \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *si las curvas son equivalentes entonces*

$$\int_\alpha f = \int_\beta f$$

Demostración. Tenemos que $\alpha \sim \beta \to \alpha(t) = \beta(\varphi(t))$ para φ biyectiva y creciente, entonces derivando $\alpha'(t) = \beta'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \therefore \|\alpha'(t)\| = \|\beta'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\| = \|\beta'(\varphi(t))\| \cdot \varphi'(t)$ tenemos entonces que

$$\int_\alpha f = \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\|dt = \int_a^b f(\beta(\varphi(t))) \cdot \|\beta'(\varphi(t))\| \cdot \varphi'(t)dt \underbrace{=}_{z=\varphi(t)} \int_c^d f(z) \cdot \|\beta'(z)\|dz = \int_\beta f$$

□