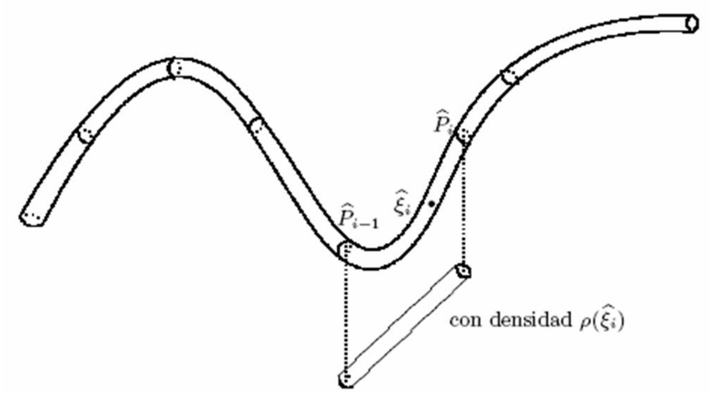
Integral de Línea (funciones escalares)(Masa)

Pensemos en un alambre ℓ del cual se conoce su densidad lineal (en gr/cm) en cada punto, por la función ρ. que asocia a cada punto $p \in \ell$, el número real $\rho(p) =$ densidad del alambre, podemos suponer que la imagen del alambre coincide con la imagen de cierta función escalar $\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Si tomamos la partición $a = t_0 < t_1 < ...t_n = b$ cuya partición asociada es $\lambda(t_0), \lambda(t_1), ..., \lambda(t_n)$ y en cada $[t_{i-1}, t_i]$ tomamos ϵ_i y bajo λ tenemos $\lambda(\epsilon_i) \in [\lambda(t_{i-1}), \lambda(t_i)]$ y la masa del alambre entre $\lambda(t_{i-1})$, $\lambda(t_i)$ es aproximadamente igual a la densidad del alambre en $\lambda(\epsilon_i)$ multiplicada por la longitud del alambre entre $\lambda(t_i)$, $\lambda(t_{i-1})$.



Es decir masa del alambre en $[\lambda(t_{i-1}), \lambda(t_i)]$ es

$$m_i = \rho(\lambda(\epsilon_i)) \cdot \|t_i - t_{i-1}\|$$

si la función λ es diferenciable en $[a, b]$, aplicamos el Teorema del Valor Medio

$$m_i = \rho(\lambda(\epsilon_i))\|\lambda'(\epsilon_i^*)\|(t_i - t_{i-1})$$

$\therefore$ La masa total del alambre esta dada por

$$M_\ell = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(\lambda(\epsilon_i))\|\lambda'(\epsilon_i^*)\|(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b \rho(\lambda(t))\|\lambda'(t)\|dt$$

Ejemplo Hallar la masa de un alambre que tiene la forma de la hélice circular dada por la curva

$$\lambda(t) = (\cos(t), \sin(t), t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

si la densidad en el punto (x, y, z) está dada por $\rho(x, y, x) = x^2 + y^2 + z^2$ gramos por unidad de longitud de alambre.

Solución Tenemos que

$$\rho(\lambda(t)) = \rho(\cos(t), \sin(t), t) = (\cos(t))^2 + (\sin(1))^2 + (t)^2 = 1 + t^2$$

mientras que

$$\lambda'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1) \;\Rightarrow\; \|\lambda'(t)\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

por lo tanto

$$\int_\lambda f = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}(1+t^2)dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1+t^2)dt = \sqrt{2}\left(t + \frac{t^3}{3}\,\Big|_0^{2\pi}\right) = \sqrt{2}\left(2\pi + \frac{8\pi^3}{3}\right)$$

Proposición 1. *La integral de trayectoria de $f(x,y)$, a lo largo de una trayectoria dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ es:*

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}d\theta$$

Demostración. tenemos que en coordenadas polares

$$\begin{pmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \lambda(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$$

por lo que

$$\lambda'(\theta) = (r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta, r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta)$$

$$\|\lambda'(\theta)\| = \sqrt{(r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta)^2 + (r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta)^2} = \sqrt{(r(\theta))^2(r'(\theta))^2}$$

por lo tanto

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\lambda(\theta))\|\lambda'(\theta)\|d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{(r(\theta))^2(r'(\theta))^2}\;d\theta$$

□

Ejemplo Calcular la integral de trayectoria de $f(x,y) = 1$ sobre la trayectoria $r = \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]$

Solución Para esto tenemos que

$$f(\lambda(\theta)) = f(\theta\cos\theta, \theta\sin\theta) = 1$$

mientras que

$$\|\lambda'(\theta)\| = \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} = \sqrt{\theta^2 + 1}$$

por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} f(\lambda(\theta))\|\lambda'(\theta)\|d\theta = \int_0^{2\pi}\sqrt{\theta^2+1}d\theta = \frac{\theta}{2}\sqrt{\theta^2+1} + \frac{1}{2}\ln(\theta + \sqrt{\theta^2+1})\,\Big|_0^{2\pi} =$$

$$\pi\sqrt{1+4\pi^2} - \left(\frac{1}{2}\right)\ln(-2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$$

Integral de Línea (funciones escalares)(Propiedades)

Proposición 2. *Sea Γ una curva suave por pedazos parametrizada por la función $\alpha : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. $\gamma : [a,b] \Rightarrow \mathbb{R}^n$. Si $f, g : \Gamma \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas y $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ entonces*

$$\int_\Gamma (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_\Gamma f + \beta \int_\Gamma g$$

Demostración. En est caso se tiene

$$\int_\Gamma (\alpha f + \beta g) = \int_a^b (\alpha f + \beta g)(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\ dt$$

$$= \int_a^b ((\alpha f)(\gamma(t))\|\gamma'(t)\| + (\beta g)(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|)\ dt$$

$$= \int_a^b ((\alpha f)(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\ dt + \int_a^b (\beta g)(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|)\ dt$$

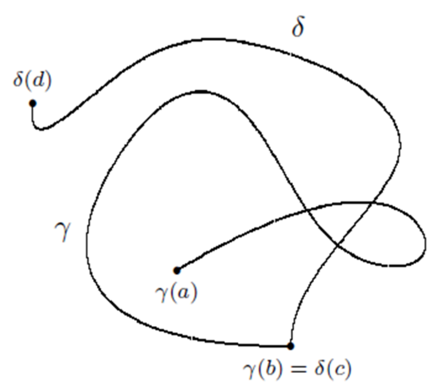
$$= \alpha \int_a^b f(\gamma(t)\|\gamma'(t)\|\ dt + \beta \int_a^b g(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|)\ dt$$

$$= \alpha \int_\Gamma f + \beta \int_\Gamma g$$

□

Definición 1. *Sean $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $\delta : [c,d] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dos funciones suaves por pedazos tales que $\gamma(b) = \delta(c)$. Definimos la función $\gamma + \delta : [a, b + d - c] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ como*

$$(\gamma + \delta)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & si \quad t \in [a,b] \\ \delta(t - b + c) & si \quad t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$



Proposición 3. *Sean $\Gamma,\ \Delta \subset \mathbb{R}^n$ curvas suaves por pedazos parametrizadas por las funciones $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $\delta : [c,d] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ respectivamente tales que $\Gamma \bigcup \Delta$ es suave por pedazos y esta parametrizada por $\gamma + \delta$. Si $f : \Gamma \bigcup \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua entonces*

$$\int_{\Gamma \bigcup \Delta} f = \int_{\Gamma} f + \int_{\Delta} f$$

Demostración. En este caso

$$\int_{\Gamma \bigcup \Delta} f = \int_{\Gamma} f + \int_{\Delta} f = \int_a^{b+d-c} f((\gamma+\delta)(t)) \|(\gamma+\delta)'(t)\|\ dt$$

$$= \int_a^{b} f((\gamma+\delta)(t)) \|(\gamma+\delta)'(t)\|\ dt + \int_b^{b+d-c} f((\gamma+\delta)(t)) \|(\gamma+\delta)'(t)\|\ dt$$

$$= \int_a^{b+d-c} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|\ dt + \int_b^{b+d-c} f((\delta)(t-b+c)) \|(\delta)'(t-b+c)\|\ dt$$

$$= \int_{\Gamma} f + \int_b^{b+d-c} f((\delta)(t-b+c)) \|(\delta)'(t-b+c)\|\ dt$$

haciendo el cambio de variable $s = t - b + c$ en la segunda integral

$$= \int_{\Gamma} f + \int_c^{d} f((\delta)(s)) \|(\delta)'(s)\|\ ds$$

$$= \int_{\Gamma} f + \int_{\Delta} f$$

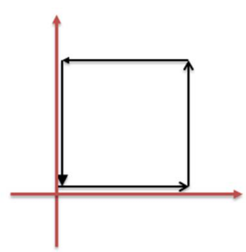
□

Ejemplo Calcular

$$\int_{\Gamma} f$$

donde Γ es el cuadrado con vértices en $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$ y $f(x,y) = x^2 + y^2$

Solución En este caso una parametrización (suave por pedazos) para esta curva



puede ser la función
$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(t) = (t,0) & si \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \alpha_2(t) = (1,t) & si \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \alpha_3(t) = (1-t,1) & si \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \alpha_4(t) = (0,1-t) & si \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

por lo que

$$\int_\Gamma f = \int_{\alpha_1} f + \int_{\alpha_2} f + \int_{\alpha_3} f + \int_{\alpha_4} f$$

$$= \int_0^1 f(t,0)\|(t,0)'\|\ dt + \int_0^1 f(1,t)\|(1,t)'\|\ dt + \int_0^1 f(1-t,1)\|(1-t,1)'\|\ dt + \int_0^1 f(0,1-t)\|(0,1-t)'\|\ dt$$

$$= \int_0^1 t^2\ dt + \int_0^1 (1+t^2)\ dt + \int_0^1 t^2\ dt + \int_0^1 (1+(1-t)^2)\ dt + \int_0^1 (1-t)^2\ dt$$

$$= \int_0^1 (4 - 4t + 4t^2)\ dt$$

$$= \frac{10}{3}$$