Campos Vectoriales

Definición 1. *Un campo vectorial en el plano $\mathbb{R}^2$ es una función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que asigna a cada vector $\overline{x} \in D \subset \mathbb{R}^2$ un único vector $F(\overline{x}) \in \mathbb{R}^2$ con*

$$F(\overline{x}) = P(\overline{x})i + Q(\overline{x})j$$

en donde P, Q son funciones escalares de dos variables

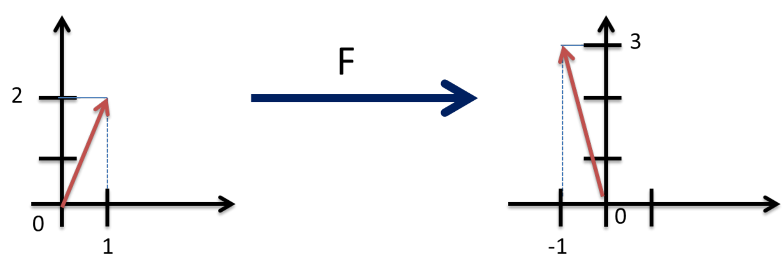
Definición 2. *Un campo vectorial en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ es una función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que asigna a cada vector $\overline{x} \in D \subset \mathbb{R}^3$ un único vector $F(\overline{x}) \in \mathbb{R}^3$ con*

$$F(\overline{x}) = P(\overline{x})i + Q(\overline{x})j + R(\overline{x})k$$

en donde P, Q y R son funciones escalares de tres variables

Ejemplo Describir algunos de los vectores del campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $F(x, y) = (x - y, x + y)$

Solución La función F transforma puntos del plano en puntos del plano



Cada vector (x, y) y su imagen forman un ángulo θ que podemos determinar

$$\cos\theta = \frac{F(x,y)\cdot(x,y)}{\|F(x,y)\|\cdot\|(x,y)\|} = \frac{(x-y,x+y)\cdot(x,y)}{\|(x-y,x+y)\|\cdot\|(x,y)\|} = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{2}(x^2+y^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

por tanto

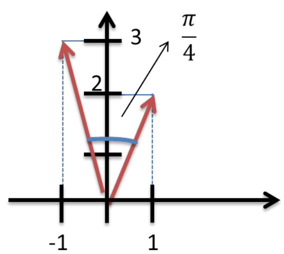
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \;\Rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{4}$$

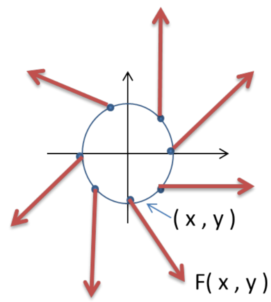
ahora bien

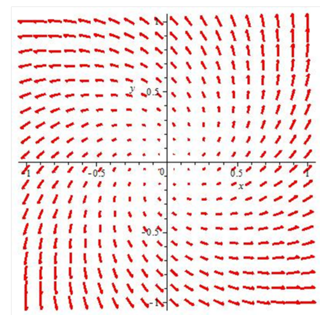
$$\|F(x,y)\| = \sqrt{2}(x^2+y^2) = \sqrt{2}\|(x,y)\|$$

Asi, la función F gira cada vector (x, y) del plano un ángulo $\frac{\pi}{4}$ radianes y luego aumenta su tamaño $\sqrt{2}$ veces

Se representa un campo vectorial dibujando el vector $F(x,y)$ anclado en el punto (x,y), o sea, la imagen $F(x,y)$ se dibuja conservando su magnitud y dirección anclada en su correspondiente preimagen (x,y)



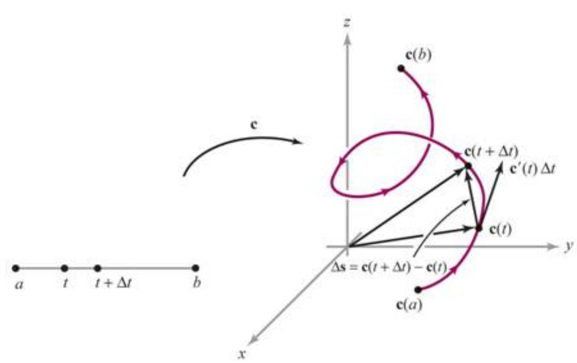




Integral de linea (Campos vectoriales)

Si $F = P\hat{i}+Q\hat{j}+R\hat{k}$ es un campo de fuerza en el espacio (que puede ser electrico o gravitacional) continuo a lo largo de una trayectoria $C : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ que tiene primera derivada continua en el intervalo $[a,b]$ sobre la cual una partícula se mueve a mientras actua sobre ella una fuerza F.
Sea $P = \{a = t_0, t_1, ..., t_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$ Si C es un desplazamiento en linea recta dado por el vector d y F es una fuerza constante, entonces el trabajo realizado por F al mover la partícula a lo largo de la trayectoria es $F \cdot d$

$F \cdot d =$ magnitud de la fuerza por desplazamiento , entonces



$c(t+\Delta t) - c(t)$ es el desplazamiento

$$\frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t} = c'(t)$$

teorema del valor medio

$\therefore c(t+\Delta t) - c(t) = c'(t)\Delta t$

$\therefore$ el trabajo relaizado para ir de $c(t)$ a $c(t+\Delta t)$

$T = F(c(t)) \cdot \Delta s \approx F(c(t)) \cdot c'(t)\Delta t$

entonces el trabajo realizado es

$$T \approx \sum F(c(t_i)) \cdot \Delta s = \sum F(c(t_i)) \cdot c'(t)\Delta t$$

y cuando $n \to \infty$ tenemos que

$$T = \int_a^b F(c(t)) \cdot c'(t)dt$$

Ejemplo Calcular el trabajo realizado por la fuerza $F(x,y) = xy\hat{i} + seny\hat{j}$ y cuando el punto de aplicación de esta recorre el arco de parábola $y = x^2$ cuando recorre el segmento de la recta $y = x$ entre los puntos de corte entre ambas curvas.

Solución Los puntos de corte son $(0,0)$ y $(1,1)$. Una parametrización de la parábola $y = x^2$ es
$c(t) = (t, t^2),\ t\epsilon[0,1]$
$\therefore F(c(t)) = F(t,t^2) = (t^3, sent^2) \therefore c'(t) =)(1,2t)$
$\therefore \displaystyle\int_0^1 (t^3, sent^2) \cdot (1,2t)dt = \int_0^1 t^3 + 2tsent^2 dt = \frac{t^4}{4} - cost^2\Big|_0^1 =$
$= \frac{1}{4} - cos(1) - (0-1) = \frac{1}{4} - cos(1) + 1 = \frac{5}{4} - cos(1)$

Para el segundo trabajo

Una parametrización es $c(t) = (t,t),\ t\epsilon[0,1] \therefore F(c(t)) = (t^2, sent)$ y $c'(t) = (1,1)$
$\therefore \displaystyle\int_0^1 (t^2, sent) \cdot (1,1)dt = \int_0^1 t^2 + sentdt = \frac{t^3}{3} - cost\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - cos(1) - [0-1] = \frac{4}{3} - cos(1).$

$\therefore$ El valor de la integral curvilinea ha variado al cambiar la curva.