Integrales Triples

Definición 1. *Un paralelepipedo B es el producto cartesiano de tres intervalos, es decir*

$$B = [a,b] \times [c,d] \times [u,v] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, p \leq z \leq q\}$$

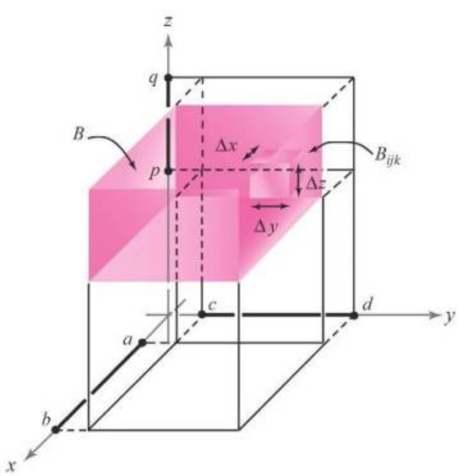
y una partición P de B no será más que el producto cartesiano de tres particiones:

$$P = P_1 \times P_2 \times P_3$$

con

$$P_1 = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$$
$$P_2 = \{c = y_0, y_1, ..., y_m = d\}$$
$$P_3 = \{u = z_0, z_1, ..., z_l = v\}$$
$$P = \{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k] \mid i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., m,\ k = 1, ..., l\}$$

Dada una función continua $f : B \to \mathbb{R}$ donde B es algún paralelepipedo rectangular en $\mathbb{R}^3$ podemos definir la integral de f sobre B como un límite de sumas, partimos los tres lados de B en "n"partes iguales.



Para las sumas inferiores se tiene

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{ijk} V(B_{ijk})$$

Para las sumas superiores

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{ijk} V(B_{ijk})$$

donde $B_{ijk} \in B$, el ijk-ésimo paralelepipedo rectangular o caja en la partición de B y $V(B_{ijk})$ es el volumen de B_{ijk}

Ejemplo Calcular

$$\int_B f \quad \textit{donde} \quad f : B \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \textit{esta dada por} \quad f(x,y,z) = xyz$$

Solución consideremos la partición

$$P = \left\{ \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] \times \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \right\}$$

con lo que se tendrá

$$m_{ijk} = \text{mín}\{xyz \mid x, y, z \in B_{ijk} = \frac{(i-1)(j-1)(k-1)}{n^3}$$

$$M_{ijk} = \text{máx}\{xyz \mid x, y, z \in B_{ijk} = \frac{(i)(j)(k)}{n^3}$$

por lo que

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{ijk}V(B_{ijk}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(i-1)(j-1)(k-1)}{n^3}\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^6}\sum_{i=1}^{n}(i-1)\sum_{j=1}^{n}(j-1)\sum_{k=1}^{n}(k-1)$$

$$= \frac{1}{n^6}\frac{(n-1)n}{2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}\cdot\frac{(n-1)}{2} = \frac{(n-1)^3}{8n^3}$$

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{ijk}V(B_{ijk}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(i)(j)(k)}{n^3}\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^6}\sum_{i=1}^{n}(i)\sum_{j=1}^{n}(j)\sum_{k=1}^{n}(k)$$

$$= \frac{1}{n^6}\frac{(n+1)n}{2}\cdot\frac{(n+1)n}{2}\cdot\frac{(n+1)}{2} = \frac{(n+1)^3}{8n^3}$$

tomando limite se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^3}{8n^3} = \frac{1}{8}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{8n^3} = \frac{1}{8}$$

por lo tanto

$$\int_B f = \int\int\int_B xyzdxdydz = \frac{1}{8}$$

Definición 2. *Sea f una función acotada de tres variables, definida en B. La llamamos integral triple o simplemente integral de f en B, y la denotamos*

$$\int_B f dv \quad , \quad \int_B f(x,y,z)dr \quad , \quad \int\int\int_B f(x,y,z)dxdydz$$

Resultados análogos a las integrales dobles que se cumplen para integrales triples.

- Las funciones continuas definidas en B son integrables
- Funciones acotadas cuyas discontinuidades estan confinadas en gráficas de funciones continuas son integrables

Si $B = [a,b]\times[c,d]\times[u,v]$. Entonces tenemos las integrales iteradas

$$\int_u^v\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdydz \qquad \int_u^v\int_a^b\int_c^d f(x,y,z)d \qquad \int_a^b\int_u^v\int_c^d f(x,y,z)dydzdx$$

El orden de dx, dy, dz indica como se realiza la integración como en el caso de 2 variables, se cumple el teorema de fubini si f es continua, entonces las 6 posibles integrales son iguales. En otras palabras , una

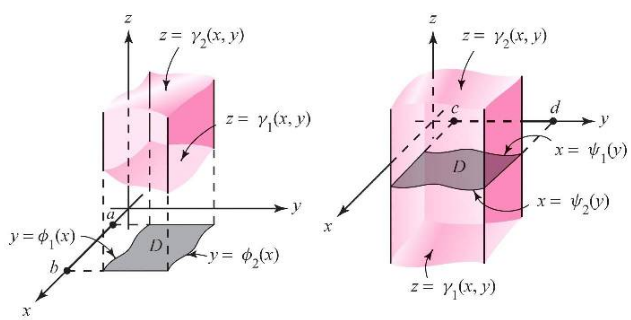
integral triple se puede reducir a una triple integración iterada.
La idea es considerar conjuntos acotados (cajas) $W \subset \mathbb{R}^3$ tal que $B \subset W$. Asi dada dada $f : W \to \mathbb{R}$ definimos $\bar{f}$ que coincide con f en W y cero fuera de W. Si B es una caja que contiene a W y ∂W está formada por las gráficas de un número finito de funciones continuas, $\bar{f}$ sera integrable y $\displaystyle\int_W f(x,y,z)dv = \int_b \bar{f}(x,y,z)dW$

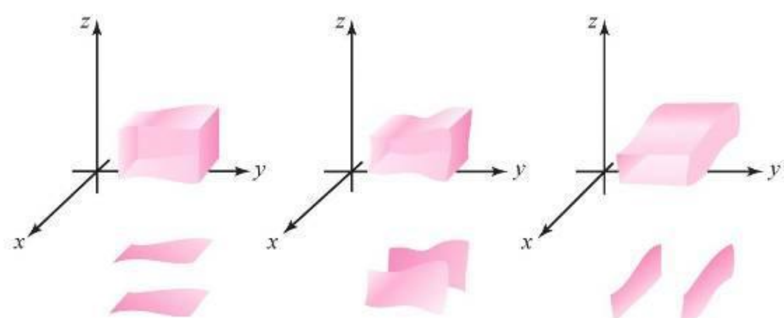
Una región W es de tipo I si:

1. $a \leq x \leq b \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \quad \varphi_1(x,y) \leq z \leq \varphi_2(x,y)$
2. $c \leq y \leq d \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \quad \gamma_1(x,y) \leq z \leq \gamma_2(x,y)$

Una región es de tipo II si se puede expresar como 1. y 2. intercambiando x y z. W es del tipo III si se puede expresar como 1. y 2. con y y z intercambiados.

Una región W que sea del tipo I, II y III se llama del tipo IV.



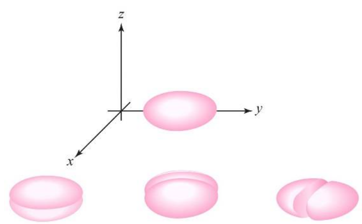


la tapa y el fondo son superficies $z=\gamma(x,y)$

el frente y la parte posterior son superficies $x=\rho(y,z)$

los lados izquierdo y derecho son superficies $y=\delta(x,y)$

Un ejemplo de una región del tipo IV es la bola de radio r, $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$

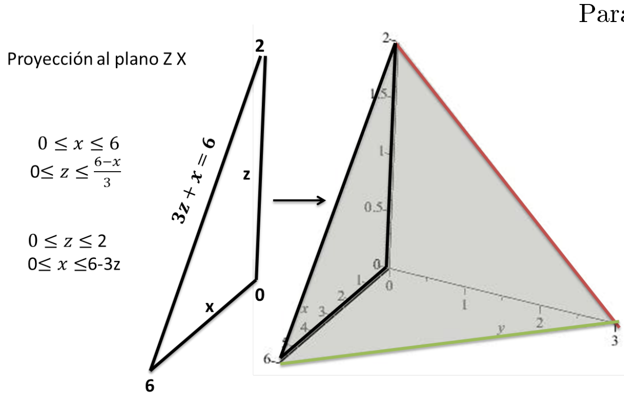


Ejemplo Considere la integral reiterada

$$I = \int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} xy^2 dzdydx$$

Mostrar que sus limites de integración definen una región que se puede tomar indistintamente como cualquiera de las seis formas posibles y cambiar el orden de integración para obtener las otras formas de integrales reiteradas.

Solución En el plano X Z se tiene



Para el Plano X Z se tiene

$$0 \leq x \leq 6$$
$$0 \leq z \leq \frac{6-x}{3}$$
$$0 \leq y \leq \frac{6-x-3z}{2}$$

$$\int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{3}} \int_0^{\frac{6-x-3z}{2}} xy^2 dy\ dz\ dx$$

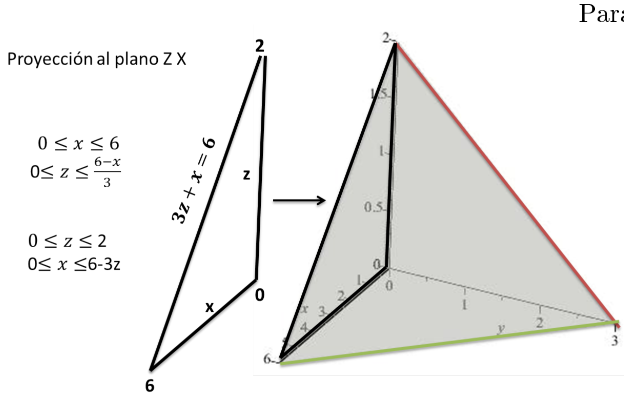
En este caso

$$\int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{3}} \left(\int_0^{\frac{6-x-3z}{2}} xy^2\ dy \right) dz\ dx$$

$$= \int_0^6 \left(\int_0^{\frac{6-x}{3}} \frac{x}{3} \left(3 - \frac{x}{2} - \frac{3z}{2} \right)^3 dz \right) dx$$

$$= \int_0^6 \left(\frac{9x}{2} - 3x^2 + \frac{3x^3}{4} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{288} \right) dx$$

$$= \frac{27}{5}$$



Para el Plano X Z se tiene

$$0 \leq z \leq 2$$
$$0 \leq x \leq 6 - 3z$$
$$0 \leq y \leq \frac{6-x-3z}{3}$$
$$\int_0^2 \int_0^{6-3z} \int_0^{\frac{6-x-3z}{2}} xy^2 dydxdz$$

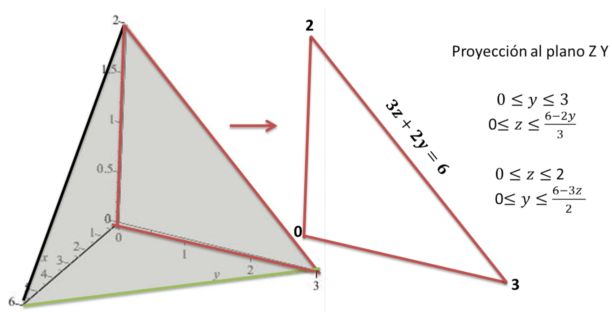
En este caso

$$\int_0^2 \int_0^{6-3z} \left(\int_0^{\frac{6-x-3z}{2}} xy^2 dy \right) dx \ dz$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{6-3z} -\frac{x}{24} (-6 + x + 3z)^3 \, dx \right) \ dz$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{81}{5} - \frac{81z}{2} + \frac{81z^2}{2} - \frac{81z^3}{4} + \frac{81z^4}{16} - \frac{81z^5}{160} \right) \ dz$$

$$= \frac{27}{5}$$



Para el Plano Y Z se tiene

$$0 \leq y \leq 3$$
$$0 \leq z \leq \frac{6-2y}{3}$$
$$0 \leq x \leq 6 - 3z - 2y$$
$$\int_0^3 \int_0^{\frac{6-2y}{3}} \int_0^{6-3z-2y} xy^2 dxdzdy$$

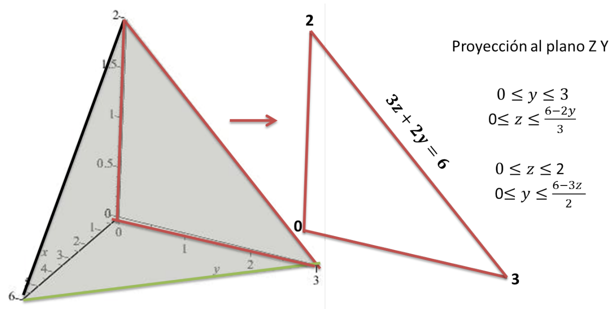
En este caso

$$\int_0^3 \int_0^{\frac{6-2y}{3}} \left(\int_0^{6-3z-2y} xy^2 dx \right) \ dz \ dy$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^{\frac{6-2y}{3}} \frac{y^2}{2} (-6 + 2y + 3z)^2 \, dz \right) \ dy$$

$$= \int_0^3 \left(12y^2 - 12y^3 + 4y^4 - \frac{4y^5}{9} \right) \ dy$$

$$= \frac{27}{5}$$



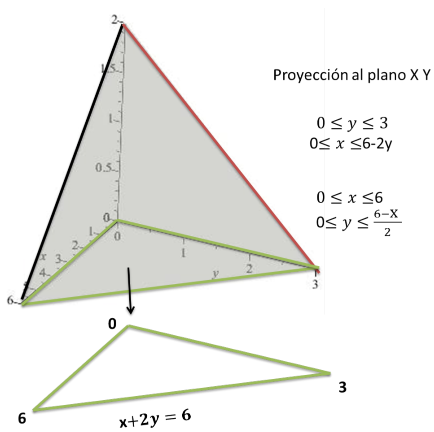
Para el Plano Y Z se tiene

$$0 \leq z \leq 2$$

$$0 \leq y \leq \tfrac{6-3z}{3}$$

$$0 \leq x \leq 6 - 3z - 2y$$

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{6-3z}{2}} \int_0^{6-3z-2y} xy^2 dx\ dy\ dz$$



En este caso

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{6-3z}{2}} \left(\int_0^{6-3z-2y} xy^2 dx \right)\ dy\ dz$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{6-3z}{2}} \frac{y^2}{2} (-6+2y+3z)^2\, dy \right)\ dz$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{81}{5} - \frac{81z}{2} + \frac{81z^2}{2} - \frac{81z^3}{4} + \frac{81z^4}{16} - \frac{81z^5}{160} \right)\ dz$$

$$= \frac{27}{5}$$

Para el Plano X Y se tiene

$$0 \leq x \leq 6$$

$$0 \leq y \leq \tfrac{6-x}{2}$$

$$0 \leq z \leq \tfrac{6-x-2y}{3}$$

$$\int_0^3 \int_0^{\frac{6-x}{2}} \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} xy^2 dz\ dy\ dx$$

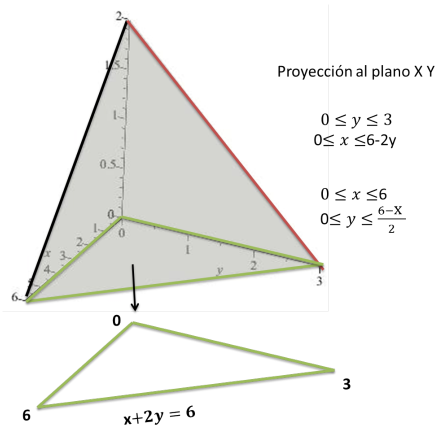
En este caso

$$\int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} \left(\int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} xy^2 dz \right)\ dy\ dx$$

$$= \int_0^6 \left(\int_0^{\frac{6-x}{2}} -\frac{xy^2}{3} (-6+x+2y)\, dy \right)\ dx$$

$$= \int_0^6 \left(\frac{9x}{2} - 3x^2 + \frac{3x^3}{4} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{288} \right)\ dx$$

$$= \frac{27}{5}$$



Para el Plano X Y se tiene

$$0 \leq y \leq 3$$

$$0 \leq x \leq 6-2y$$

$$0 \leq z \leq \frac{6-x-2y}{3}$$

$$\int_0^6 \int_0^{6-2y} \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} xy^2 dz dx dy$$

En este caso

$$\int_0^3 \int_0^{6-2y} \left(\int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} xy^2 dz \right) dx \ dy$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^{6-2y} -\frac{xy^2}{3} \left(-6+x+2y\right) dx \right) \ dy$$

$$= \int_0^3 \left((12y^2 - 12y^3 + 4y^4 - \frac{4y^5}{9} \right) \ dy$$

$$= \frac{27}{5}$$