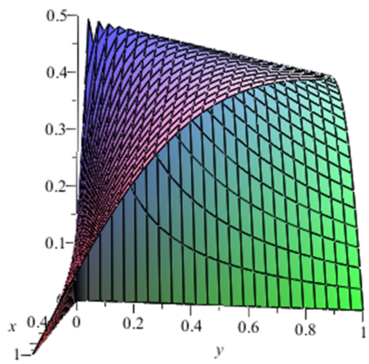
Integrales impropias (funciones no continuas sobre conjuntos acotados)

Ejemplo Considere la función

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$



En este caso si nos acercamos a cero por la recta $x = 0$

$$f(0,y) = 0$$

por lo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(0,y) = 0$$

Por otro lado si nos acercamos a cero por la recta $y = x$ se tiene

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

por lo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x) = \frac{1}{2}$$

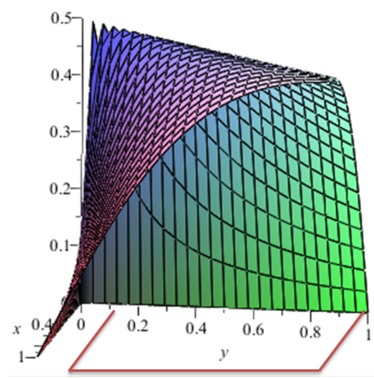
de manera que esta función no es continua en cero.
Sin embargo

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{x^2+y^2}\ dx\ dy = \frac{1}{2}\ln(2)$$

Dado que las integrales dobles fueron definidas para funciones continuas, lo que haremos es restringir el dominio de la función a una región R' en la cual la función sea continua y sin problema podamos calcular

$$\int_{R'} f$$

En este caso



R'= [ε , 1] × [ε , 1]

podemos definir

$$R' = [\epsilon, 1] \times [\epsilon, 1]$$

y en R' f si es continua por lo que

$$\int_{R'} f = \int_{\epsilon}^{1} \int_{\epsilon}^{1} \frac{xy}{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_{\epsilon}^{1} \left(-\frac{1}{2}\ln(\epsilon^2+y^2)y + \frac{1}{2}\ln(y^2+1)y \right)\, dy$$

$$= \frac{1}{4}\ln(2\epsilon^2)\epsilon^2 + \frac{1}{4}\ln(2\epsilon^2)\epsilon^2 - \frac{1}{4}\ln(\epsilon^2+1)\epsilon^2 - \frac{1}{4}\ln(\epsilon^2+1) - \frac{1}{4}\ln(\epsilon^2+1)\epsilon^2 - \frac{1}{4}\ln(\epsilon^2+1) + \frac{1}{2}\ln(2)$$

Acercandonos a cero

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{4}\ln(2\epsilon^2)\epsilon^2 + \frac{1}{4}\ln(2\epsilon^2)\epsilon^2 - \frac{1}{4}\ln(\epsilon^2+1)\epsilon^2 - \frac{1}{4}\ln(\epsilon^2+1) - \frac{1}{4}\ln(\epsilon^2+1)\epsilon^2 - \frac{1}{4}\ln(\epsilon^2+1) + \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2)$$

Teorema 1. *Condición necesaria y suficiente de convergencia de integrales impropias de funciones positivas. Si $f \geq 0$ en R, y si existe una sucesión de conjuntos en R_n, tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \int\int_{R_n} f \quad dxdy = L$$

entonces

$$\int\int_{R} f \quad dxdy$$

es convergente a L

Demostración. Necesidad
Considérese el conjunto R de área $A(R)$ y una sucesión de subconjuntos cerrados R_n cuyas áreas $A(R_n)$ tienden hacia $A(R)$. Aquí los R_n se amplian monótonamente en el interior de R

$$R_1 \subset R_2 \subset \cdots \subset R_n \subset \cdots \subset R$$

Se supone que la función es continua en cada R_n. Es más debe existir una constante μ tal que

$$\int\int_{R_n} f\ dx\ dy \leq \mu$$

para toda n.
Las integrales para cada n fprman una sucesión creciente y acotada y, por tanto tiene un límite. Por el criterio de convergencia de Cauchy, para cada $\epsilon > 0$ puede hallarse $n(\epsilon)$ tal que, para cada $m > n > n(\epsilon)$

$$\left|\int\int_{R_m} f\ dx\ dy - \int\int_{R_n} f\ dx\ dy\right| = \left|\int\int_{R_m - R_n} f\ dx\ dy\right|$$

$$\leq \int\int_{R_m - R_n} |f|\ dx\ dy < \epsilon$$

para $m > n > n(\epsilon)$ se concluye

$$\int_R f = \lim_{n\to\infty} f(x,y)\ dx\ dy$$

existe.
Suficiencia
Basta probar que para subconjuntos R_n y $\tilde{R_n}$ de R se cumple $L = \tilde{L}$ donde

$$L = \lim_{n\to\infty} I_n \qquad I_n = \int\int_{R_n} f \quad dxdy$$

$$\tilde{L} = \lim_{n\to\infty} \tilde{I_n} \qquad \tilde{I_n} = \int\int_{\tilde{R_n}} f \quad dxdy$$

Dado $\tilde{R_n} \subset R$ compacto y como R_n es una sucesión de conjuntos en R, entonces $\exists$ algún N (natural) tal que $\tilde{R_n} \subset R_n\ \forall n > N$ $\therefore$ podemos escribir

$$R_n = \tilde{R_n} \bigcup H \qquad H = R_n - \tilde{R_n}$$

$\therefore$

$$\int\int_{R_n} f \quad dxdy = \int\int_{\tilde{R_n}} f \quad dxdy + \int\int_H f \quad dxdy$$

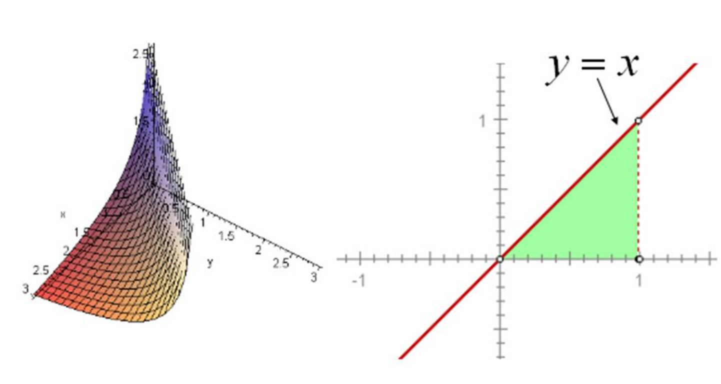
siendo $f \geq 0$ sobre H se tiene que

$$I_n = \int\int_{R_n} f \quad dxdy \geq \int\int_{\tilde{R_n}} f \quad dxdy = \tilde{I_n} \qquad \forall n > N \Rightarrow \tilde{L} = \lim_{n\to\infty} \tilde{I_n} \leq L \qquad \therefore \qquad \tilde{L} \leq L$$

Intercambiando R_n con $\tilde{R_n}$ resulta que $L \leq \tilde{L} \therefore L = \tilde{L}$ □

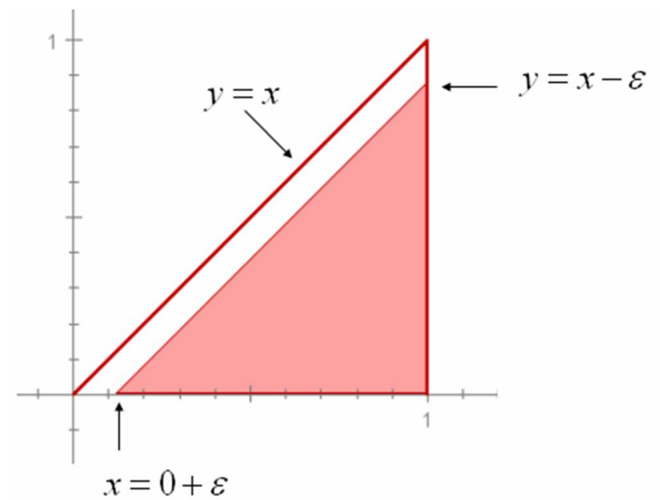
Ejemplo Evaluar $\displaystyle\int\int_R \frac{dA}{\sqrt{x-y}}$ donde R es el triángulo acotado por los ejes X y la linea $x=1$ y la linea $y=x$

Sol.



En la recta $y=x$, $\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$ no esta definida por lo tanto escribimos

$\displaystyle\int\int_R \frac{dA}{\sqrt{x-y}} = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{x-y}}$ y notamos que la integral interior es impropia por lo que



$$\int\int_R \frac{dA}{\sqrt{x-y}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 dx \int_o^{x-\varepsilon} \frac{dy}{\sqrt{x-y}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 dx \lim_{\varepsilon\to 0^+} -2\sqrt{x-y}\Big|_0^{x-\varepsilon} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 dx \lim_{\varepsilon\to 0^+} -2\sqrt{\varepsilon}+2\sqrt{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\int_\varepsilon^1 \sqrt{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_\varepsilon^1\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\varepsilon^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

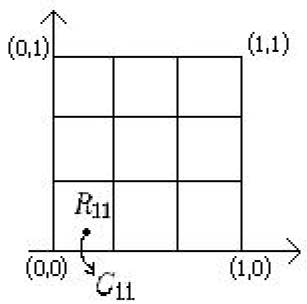
Integrales impropias (funciones no acotadas)

Sea R el cuadrado unitario $[0,1]\times[0,1]$ y sea $f:R\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}} & si \quad x\neq 0\\ f(0,y)=0 & \end{cases}$$

f no está acotada en R, pues conforme x se acerca a cero, f se vuelve arbitrariamente grande. Sea $R_{i,j}$ una partición regular de R y formemos las suma de Riemann

$Sn=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(c_{ij})\Delta x\Delta y$ Si invertimos el orden de integracón obtenemos el mismo valor. Asi en cierto



Sea R_{11} el subrectángulo que contiene a $(0,0)$ y escojamos algún C_{11}. Para n fija, podemos hacer S_n tan grande como queramos al escoger C_{11} mas y mas cerca de $(0,0)$, entonces, $\lim_{n\to\infty} S_n$ no puede ser independiente de la selección de C_{ij} sin embargo, evaluemos formamelmente la integral iterada de f, siguiendo las reglas para integrar una función de una variable.

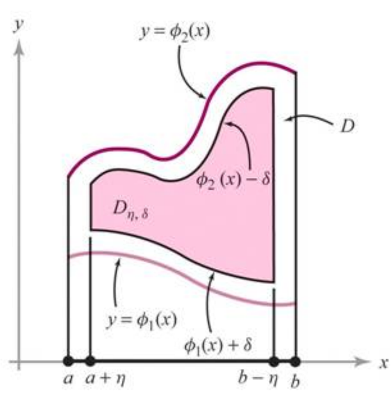
$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}dy=\int_0^1 2\sqrt{x}\Big|_0^1 dy=\int_0^1 2dy=2$$

sentido, esta función es integrable. La pregunta es en que sentido.
Supongamos que la región D es del tipo 1 y $f:D\to\mathbb{R}$ es continua y acotada exepto en ciertos puntos de la frontera. Y que f es no negativa y D está descrita por

$$a\leq x\leq b\ ,\ \phi_1(x)\leq y\leq\phi_2(x)$$

Escogemos números $\delta,\eta>0$ tales que $D_{\delta\eta}$ sea el subconjunto de D formado por los puntos (x,y) con

$$a+\eta\leq x\leq b-\eta\ ,\ \phi_1(x)+\delta\leq y\leq\phi_2(x)-\delta$$



donde η y δ se escogen lo suficientemente pequeños para que $D_{\eta\delta} \subset D$. Como f es continua y acotada en $D_{\eta\delta}$ existe la integral $\displaystyle\int\int_{D_{\eta\delta}} f dA$ ahora siempre que $\displaystyle\lim_{(\eta,\delta)\to(0,0)} \int\int_{D_{\eta\delta}} f dA$ existe, decimos que la integral de f sobre D es convergente o que f es integrable sobre D y definimos $\displaystyle\int\int_{D} f dxdy = \lim_{(\eta,\delta)\to(0,0)} \int\int_{D_{\eta\delta}}$
Como f es integrable sobre $D_{\eta\delta}$ podemos aplicar fubini.

$$\int\int_{D_{\eta\delta}} f dA = \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta} f(x,y) dydx$$

Entonces si f es integrable sobre D tenemos $\displaystyle\int\int_{D} f dA = \lim_{(\eta,\delta)\to(0,0)} \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta} f(x,y) dydx$

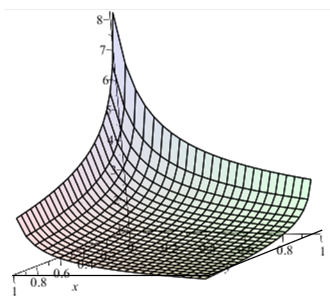
Ejemplo Calcular

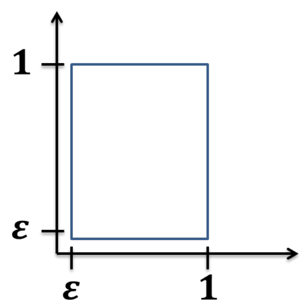
$$\int\int_{R} \frac{1}{\sqrt[3]{xy}}$$

donde $R = [0,1] \times [0,1]$

Solución Elegimos

$$R' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \epsilon \le x \le 1,\ \epsilon \le y \le 1\}$$





En R' se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{R'} f &= \int_{\epsilon}^{1}\int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{xy}}\, dx\ dy \\
&= \left(\int_{\epsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(\int_{\epsilon}^{1} \frac{dy}{\sqrt[3]{y}}\right) \\
&= \left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{\epsilon}^{1}\right)\left(\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}}\Big|_{\epsilon}^{1}\right) \\
&= \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\epsilon^{\frac{2}{3}}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\epsilon^{\frac{2}{3}}\right)
\end{aligned}$$

Ahora tomando limite

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\epsilon^{\frac{2}{3}}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\epsilon^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\frac{9}{4}$$

por lo tanto

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{xy}}\ dx\ dy=\frac{9}{4}$$

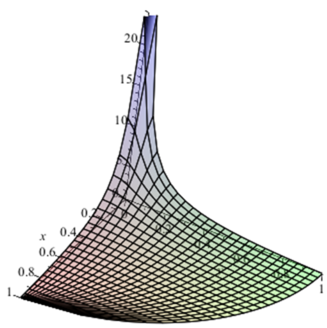
Ejemplo Calcular

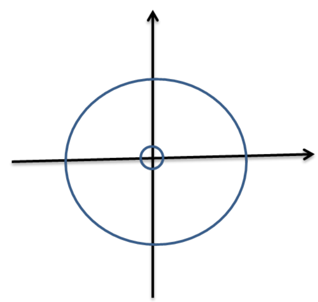
$$\int\int_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dx\ dy$$

donde $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$

Solución Elegimos

$$R'=\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid \epsilon\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$$





En R' se tiene haciendo cambio de variables a coordenadas polares $x=r\cos(\theta)$, $y=r\operatorname{sen}(\theta)$

$$\int_{R'} f=\int_\epsilon^1\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}r\ d\theta\ dr$$

$$=\int_\epsilon^1 2\pi\ dr$$

$$=2\pi(1-\epsilon)$$

Ahora tomando limite

$$\lim_{\epsilon\to 0} 2\pi(1-\epsilon)$$

$$2\pi$$

por lo tanto

$$\int_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dx\ dy=2\pi$$