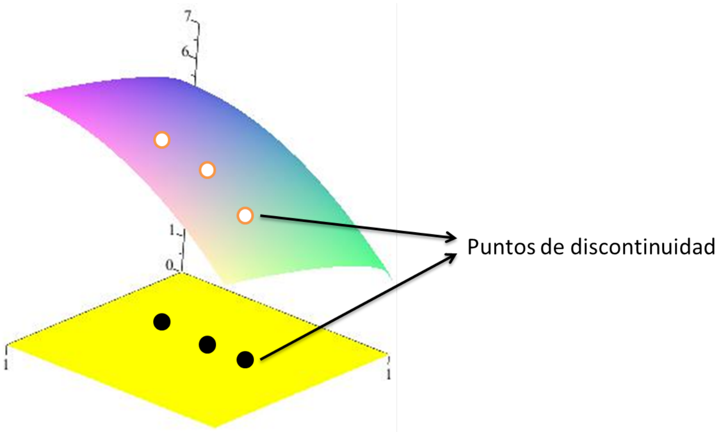
Funciones discontinuas en un número finito de puntos que son integrables

Supóngase que se tiene una función $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que es discontinua en una cantidad finita de puntos



En este caso se tiene que

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

y tenemos las siguientes particiones

$$P = P_{[a,b]} = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

$$Q = P_{[c,d]} = \{y_1, \ldots, y_m\}$$

Por lo que una partición del rectángulo R seria

$$P' = P \times Q$$

Queremos ver que se cumple

$$\overline{S}(f, P') - \underline{S}(f, P') < \epsilon$$

en este caso

$$\overline{S}(f, P') - \underline{S}(f, P') = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(M_{ij} - m_{ij})A(R_{ij})$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(M_{ij} - m_{ij})A(R_{ij})}_{Subrectangulos\ que\ cubren\ las\ finitas\ discontinuidades} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(M_{ij} - m_{ij})A(R_{ij})}_{Subrectangulos\ donde\ f\ es\ continua}$$

$$< \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(M_{ij} - m_{ij})A(R_{ij})}_{Subrectangulos\ que\ cubren\ las\ finitas\ discontinuidades} + \frac{\epsilon}{2}$$

Para el primer sumando de la expresión anterior

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(M_{ij}-m_{ij})A(R_{ij}) < \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(M-m)A(R_{ij})$$

donde $M=\sup\{f(x,y)\}$ y $m=\inf\{f(x,y)\}$

$$=(M-m)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}A(R_{ij})$$

ahora bien para las áreas $A(R_{ij})$ tenemos que para la partición P

$$\left[x_i-\frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{M-m}\sqrt{2n}}, x_i+\frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{M-m}\sqrt{2n}}\right]$$

por lo que la longitud del i-ésimo intervalo es

$$\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{M-m}\sqrt{2n}}\right)$$

Para la partición Q

$$\left[y_j-\frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{M-m}\sqrt{2n}}, y_j+\frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{M-m}\sqrt{2n}}\right]$$

por lo que la longitud de j-ésimo subintervalo es

$$\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{M-m}\sqrt{2n}}\right)$$

de manera que el área de i-ésimo rectángulo es:

$$\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{M-m}\sqrt{2n}}\right)\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{M-m}\sqrt{2n}}\right)=\frac{\epsilon}{2n(M-m)}$$

al ser finito el número de puntos donde f es discontinua las áreas de los subrectángulos que los contienen se sumaran n-veces

$$(M-m)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}A(R_{ij})=(M-m)\sum_{k=1}^{n}A(R_k)=(M-m)n\frac{\epsilon}{2n(M-m)}=\frac{\epsilon}{2}$$

Por lo que

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(M_{ij}-m_{ij})A(R_{ij})}_{Subrectangulos\ que\ cubren\ las\ finitas\ discontinuidades}+\frac{\epsilon}{2}$$

$$<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

en consecuencia la función con un número finito de discontinuidades es integrable El proceso anterior se puede generalizar a funciones $f: R\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ con un número finito de discontinuidades

Definición 1. *Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ tiene* **contenido cero** *si para cada $\epsilon > 0$ existe un recubrimiento finito $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ de A por rectángulos tales que*

$$\sum_{i=1}^{n} v(U_i) < \epsilon$$

según la definición anterior y nuestra construcción se tiene el siguiente resultado

Teorema 1. *Sea R un rectángulo cerrado y $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función acotada. Sea $B = \{x \in R \mid f \quad no \quad es \quad continua \quad en \quad x\}$ entonces si B es un conjunto de contenido cero f es integrable*

Ahora bien el si ahora se tiene que la función f es discontinua en una cantidad infinita numerable de puntos, el proceso para ver que es integrable sería

$$\overline{S}(f, P') - \underline{S}(f, P') = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(M_{ij} - m_{ij})A(R_{ij})$$

$$< \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}(M - m)A(R)}_{Subrectangulos\ que\ cubren\ las\ infinitas\ discontinuidades} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(M_{ij} - m_{ij})A(R_{ij})}_{Subrectangulos\ donde\ f\ es\ continua}$$

$$< \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}(M - m)A(R)}_{Subrectangulos\ que\ cubren\ las\ infinitas\ discontinuidades} + \frac{\epsilon}{2}$$

Para el primer sumando de la expresión anterior

$$\sum_{i=1}^{infty}(M - m)A(R) = (M - n)\sum_{i=1}^{infty}(M - m)A(R)$$

donde $M = \sup\{f(x, y)\}$ y $m = \text{ínf}\{f(x, y)\}$

$$= (M - m)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}A(R_{ij})$$

ahora bien para las áreas $A(R)$ tenemos que para la partición P

$$\left[x_i - \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{2^{k+2}}\sqrt{M - n}}, x_i + \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{2^{k+2}}\sqrt{M - n}}\right]$$

por lo que la longitud del k-ésimo intervalo es

$$\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2^{k+1}}\sqrt{M - n}}\right)$$

Para la partición Q

$$\left[y_j - \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{2^{k+2}}\sqrt{M-n}}, y_j + \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{2^{k+2}}\sqrt{M-n}}\right]$$

por lo que la longitud del k-ésimo intervalo es

$$\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2^{k+1}}\sqrt{M-n}}\right)$$

de manera que el área de k-ésimo rectángulo es:

$$\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2^{k+1}}\sqrt{M-n}}\right)\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2^{k+1}}\sqrt{M-n}}\right) = \frac{\epsilon}{2^{k+1}(M-n)}$$

al ser infinito el número de puntos donde f es discontinua las áreas de los subrectángulos que los contienen se sumaran

$$(M-m)\sum_{i=1}^{\infty} A(R) = (M-m)\sum_{k=1}^{\infty} A(R_k) = (M-m)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^{k+1}(M-n)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^{k+1}}$$

Se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^k}\right)$$

$$= \left(\frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{1-2^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\epsilon}{2}$$

Por lo que

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(M_{ij}-m_{ij})A(R_{ij})}_{Subrectangulos\ que\ cubren\ las\ infinitas\ discontinuidades} + \frac{\epsilon}{2}$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

en consecuencia la función con un número infinito numerable de discontinuidades es integrable

Definición 2. *Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene* ***medida cero*** *si para cada $\epsilon > 0$ existe un recubrimiento $\{U_1, U_2, ...\}$ de A por rectángulos tales que*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \qquad y \qquad \sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \epsilon$$

Teorema 2. *Sea R un rectángulo cerrado y $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función acotada.*
Sea $B = \{x \in R \mid f \ \text{no es continua en} \ x\}$ entonces si B es un conjunto de medida cero f es integrable