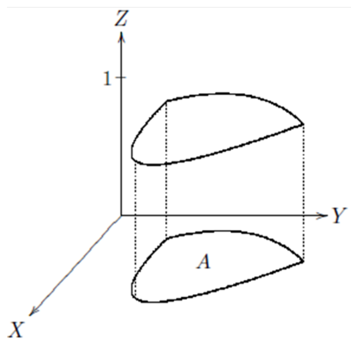
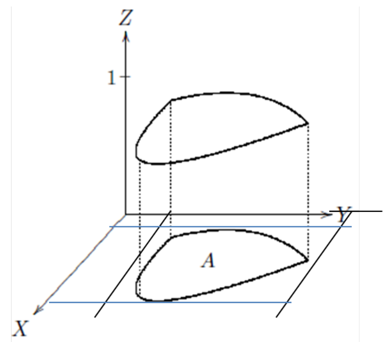
Medida de Jordan

Ejercicio Sea $A \subset \mathbb{R}^2$, un conjunto acotado, vamos a mostrar como se puede encontrar un rectángulo $R \subset \mathbb{R}^2$ tal que

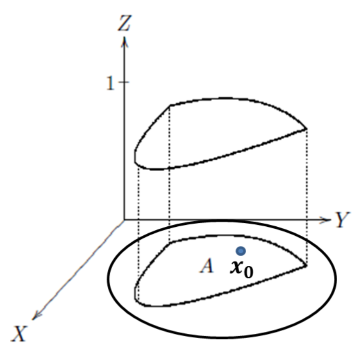
$$\overline{A} \subset R$$





Solución Como A es acotado entonces $\forall\ (x, y) \in A$ se tiene $\|(x, y)\| < K \quad p.\ a\ k > 0$ y sea $x_0 \in A$ consideremos la bola

$$B(x_0, k)$$



se tiene entonces que $\forall\ (x, y) \in B(x_0, k)$ se cumple que

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < k$$

de lo anterior se tiene

$$|x - x_0| < k \quad y \quad |y - y_0| < k$$

por lo que

$$-k < x - x_0 < k \quad y \quad -k < y - y_0 < k$$

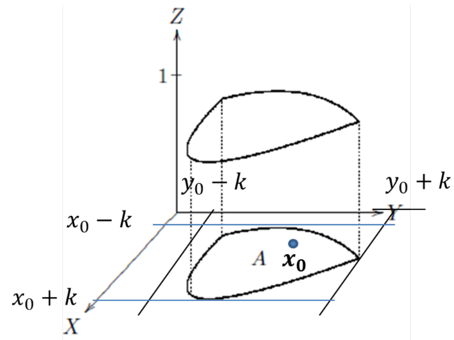
$$\Rightarrow \ -k + x_0 < x < k + x_0 \quad y \quad -k + y_0 < y < k + y_0$$

$$\Rightarrow \ x \in (-k + x_0, k + x_0) \quad y \quad y \in (-k + y_0, k + y_0)$$

de manera que el rectángulo

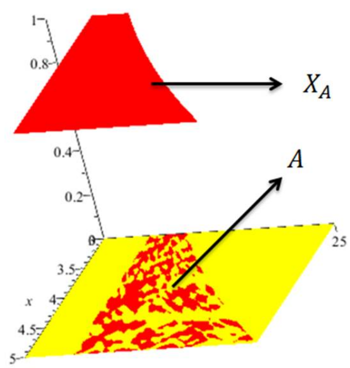
$$[-k + x_0, k + x_0] \times [-k + y_0, k + y_0]$$

satisface que $\forall\ (x, y) \in A$ entonces $(x, y) \in R$



Definición 1. *Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado, definimos $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la función característica de A, de la siguiente forma*

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$



Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado, decimos que A es Jordan Medible si la función característica de A es integrable sobre algún rectángulo R que contenga a A. En este caso decimos que la medida de Jordan de A (que denotaremos $J(A)$) esta dada por

$$J(A) = \int_R \chi_A$$

Ejemplo Sean a,b números positivos y

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \left(\frac{b}{a}x\right)\right\}$$

En este caso A es un triángulo de base a y altura b. Mostraremos que A es Jordan-Medible en $\mathbb{R}^2$, y que su medida es $\frac{ab}{2}$

Demostración. Tomemos el rectángulo $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\} = [0,a] \times [0,b]$ el cual contiene a A. De acuerdo con nuestra definición tenemos que mostar que la función característica χ_A es integrable sobre R y que

$$\int_R \chi_A = \frac{ab}{2}$$

Sea $P_1\{\frac{ia}{n} \mid i = 1,...,n\}$ y $P_2 = \{\frac{ib}{n} \mid i = 1,...,n\}$ por tantp $P = P_1 \times P_2$ es una partición del rectángulo R, donde cada subrectángulo tiene medida $\frac{ab}{n^2}$.
Por lo que en este caso

$$\overline{S}(\chi_A, P) = \sum_{R_i \cap A \neq \emptyset} = 1 \cdot \frac{ab}{n^2} + 2 \cdot \frac{ab}{n^2} + ... + n \cdot \frac{ab}{n^2} = \frac{ab}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{ab}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\underline{S}(\chi_A, P) = \sum_{R_i \subset A \neq \emptyset} = 1 \cdot \frac{ab}{n^2} + 2 \cdot \frac{ab}{n^2} + ... + (n-1) \cdot \frac{ab}{n^2} = \frac{ab}{n^2}\left(\frac{(n-1)n}{2}\right) = \frac{ab}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$\therefore$

$$\lim_{n \to \infty} \overline{S}(\chi_A, P) = \lim_{n \to \infty} \underline{S}(\chi_A, P) = \frac{ab}{2}$$

$$J(A) = \int_R \chi_A = \frac{ab}{2}$$

□

Ejemplo Sean A el conjunto

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\right\}$$

En este caso A es la región de base 1 y altura la función x^2. Mostraremos que A es Jordan-Medible en $\mathbb{R}^2$, y que su medida es $\frac{1}{3}$

Demostración. Tomemos el rectángulo $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} = [0,1] \times [0,1]$ el cual contiene a A. De acuerdo con nuestra definición tenemos que mostrar que la función característica χ_A es integrable sobre R y que

$$\int_R \chi_A = \frac{1}{3}$$

Sea $P_1\{\frac{ia}{n} \mid i = 1, ..., n\}$ y $P_2 = \{\frac{ib}{n} \mid i = 1, ..., n\}$ por tantp $P = P_1 \times P_2$ es una partición del rectángulo R, donde cada subrectángulo tiene medida $\frac{1}{n^2}$.
Por lo que en este caso

$$\overline{S}(\chi_A, P) = \sum_{R_i \cap A \neq \emptyset} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2^2}{n^2} + ... + \cdot \frac{1}{n} \frac{n^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}\left(1 + 2^2 + \ldots + n^2\right) = \frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\underline{S}(\chi_A, P) = \sum_{R_i \subset A} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2^2}{n^2} + ... + \cdot \frac{1}{n} \frac{(n-1)^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}\left(1 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right) = \frac{1}{n^3}\left(\frac{(n-1)(n)(2(n-1)+1)}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)\right)$$

$\therefore$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(\chi_A, P) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(\chi_A, P) = \frac{1}{3}$$

$$J(A) = \int_R \chi_A = \frac{1}{3}$$

$\square$

Teorema 1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
1.- A es Jordan-Medible
2.- Para cada $\epsilon > 0$ existen $R_1, \ldots, R_k$ rectángulos tales que:

$$(a) \quad Fr(A) \subset R_1 \bigcup \cdots \bigcup R_k$$

$$(b) \quad \sum_{i=1}^{k} m(R_i) < \epsilon$$

3.-La $Fr(A)$ es Jordan-Medible y $J(Fr(A)) = 0$

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2)
Sea $\epsilon > 0$. Como A es Jordan-Medible, sabemos que χ_A es integrable sobre un rectángulo R que contiene $\overline{A}$ por lo que existe una partición P de R tal que

$$\overline{S}(\chi_a, P) - \underline{S}(\chi_A, P) < \epsilon$$

en este caso

$$\overline{S}(\chi_a, P) = \sum_{R_i \bigcap A \neq \emptyset} m(R_i)$$

$$\underline{S}(\chi_a, P) = \sum_{R_i \subset A} m(R_i)$$

por lo que

$$\overline{S}(\chi_a, P) - \underline{S}(\chi_A, P) = \sum_{\substack{R_i \bigcap A \neq \emptyset \\ R_i \bigcap A^c \neq \emptyset}} m(R_i)$$

que cumple

$$\sum_{\substack{R_i \bigcap A \neq \emptyset \\ R_i \bigcap A^c \neq \emptyset}} m(R_i) < \epsilon$$

Para ver que

$$Fr(A) \subset R_1 \bigcup \cdots \bigcup R_k$$

Como $\overline{A} \subset int(R)$ entonces $Fr(A) \subset int(R)$. Sea $x \in Fr(A)$, si $x \in int(R_i)$ entonces la condición se cumple.
Si $x \notin int(R)$ entonces esta en la frontera de más de uno de los subrectángulos entonces
(1) si los subrectángulos estan en $int(A)$ entonces $x \in int(A)$
(2) si los subrectángulos estan en $int(A^c)$ entonces $x \in ext(A)$
en ambas situaciones $x \notin Fr(A)$ lo cual es una contradicción.
Por lo tanto $x \in R_i$ donde R_i cumple la condición pedida
2) $\Rightarrow$ 3
Para probar que $Fr(A)$ es Jordan-Medible, se tiene que probar que $\chi_{Fr(A)}$ es integrable sobre el rectángulo R ya que $Fr(A) \subset R$.
Como existen $R_1, \ldots, R_k$ rectángulos tales que:

$$(a) \quad Fr(A) \subset R_1 \bigcup \cdots \bigcup R_k$$

$$(b) \quad \sum_{i=1}^{k} m(R_i) < \epsilon$$

entonces

$$\overline{S}(\chi_{Fr(A),P}) = \sum_{\substack{R_i \bigcap A \neq \emptyset \\ R_i \bigcap A^c \neq \emptyset}} m(R_i) < \epsilon$$

y como

$$\underline{S}(\chi_{Fr(A),P}) \leq \overline{S}(\chi_{Fr(A),P}) < \epsilon$$

entonces

$$0 \leq \sup\{\underline{S}(\chi_{Fr(A),P})\} < \epsilon$$

$$0 \leq \inf\{\overline{S}(\chi_{Fr(A),P})\} < \epsilon$$

entonces

$$\int_R \chi_{Fr(A)} = \overline{\int}_R \chi_{Fr(A)} = \underline{\int}_R \chi_{Fr(A)} = 0$$

3) $\Rightarrow$ 1)
Como $Fr(A)$ es Jordan-Medible y $J(Fr(A)) = 0$, existe una partición P tal que $Fr(A) \bigcap R_i \neq \emptyset$ entonces

$$\overline{S}(\chi_{Fr(A)}) = \sum_{R_i \bigcap Fr(A) \neq \emptyset} m(R_i) < \epsilon$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\overline{S}(\chi_A) - \underline{S}(\chi_{Fr(A)}) &= \sum_{\substack{R_i \bigcap A \neq \emptyset \\ R_i \bigcap A^c \neq \emptyset}} m(R_i) \\ &\leq \sum_{R_i \bigcap Fr(A) \neq \emptyset} m(R_i) < \epsilon\end{aligned}$$

por lo tanto χ_A es integrable sobre R y en consecuencia A es un conjunto Jordan-Medible □