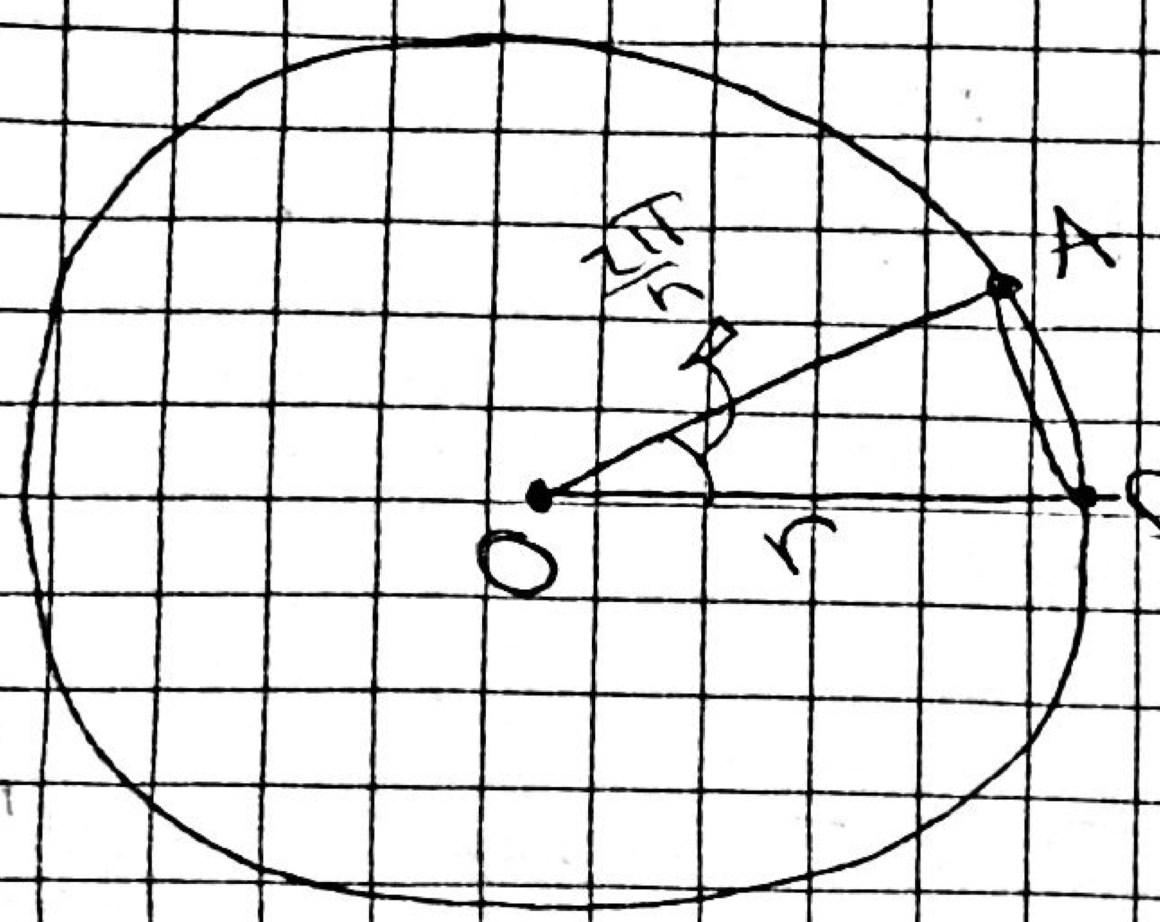
Área de un círculo, por aproximación ~~de~~ con rectángulos.

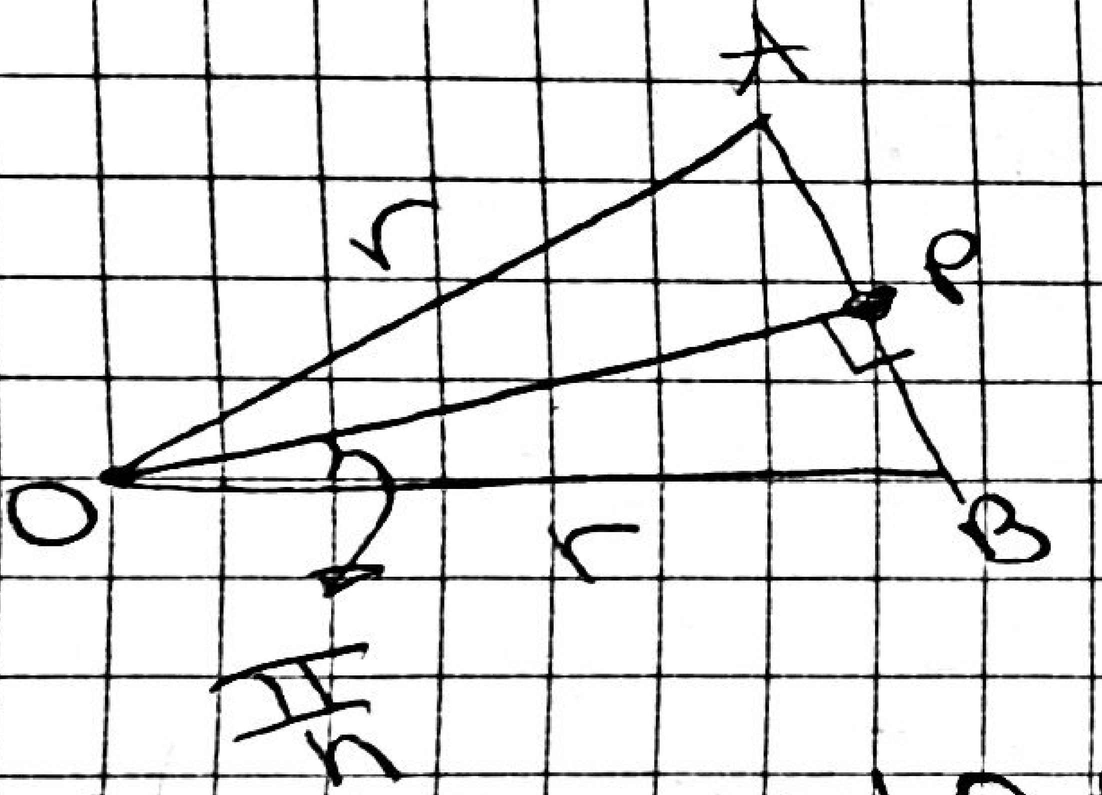
1. Tomemos un círculo de radio r.

Primero aproximaremos su área por medio de triángulos interiores. Para esto tomemos un polígono regular de n-lados inscrito en ~~la~~ el círculo. Tomemos un triángulo ABO, donde



los lados OA y OB son radios y los vértices A, B son lados consecutivos del polígono.

Sabemos que $\measuredangle BOA = \frac{2\pi}{n}$ y el ΔABO es isósceles. Tracemos la altura desde O hasta la línea AB.



Donde $\measuredangle OPB = \frac{\pi}{2}$ y el $\measuredangle BOP = \frac{\pi}{n}$.

Sabemos que $|OP| = r\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ y $|BP| = r\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Así tenemos que el área$(\Delta BOP) =$

$$\frac{r\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot r\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = r^2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2}$$

De esto tenemos que área$(\Delta BOA) =$

$r^2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) =$

Por lo tanto el área del polígono regular de n lados es:

$$\text{área}(\bigcirc) = n\, r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{n}{2} r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Así, el área límite del polígono, la cual es una cota inferior del área del círculo, es:

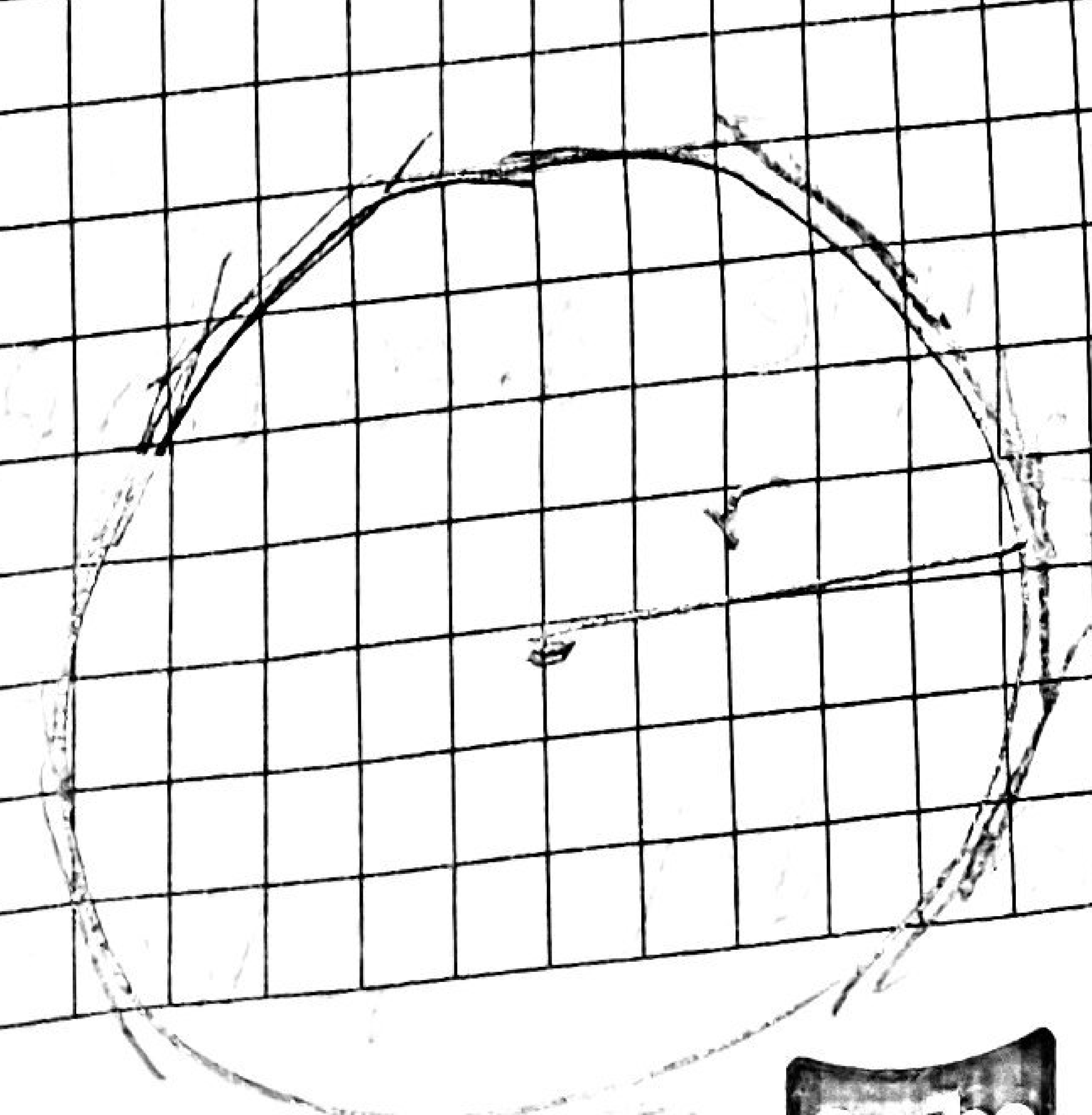
$$A(\bigcirc) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdot r^2 = \frac{r^2}{2}\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{r^2}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}} =$$

$$\frac{2\pi r^2}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}} \underset{\substack{u=\frac{2\pi}{n} \\ \Rightarrow n\to\infty,\ u\to 0}}{=} \pi r^2 \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u} =$$

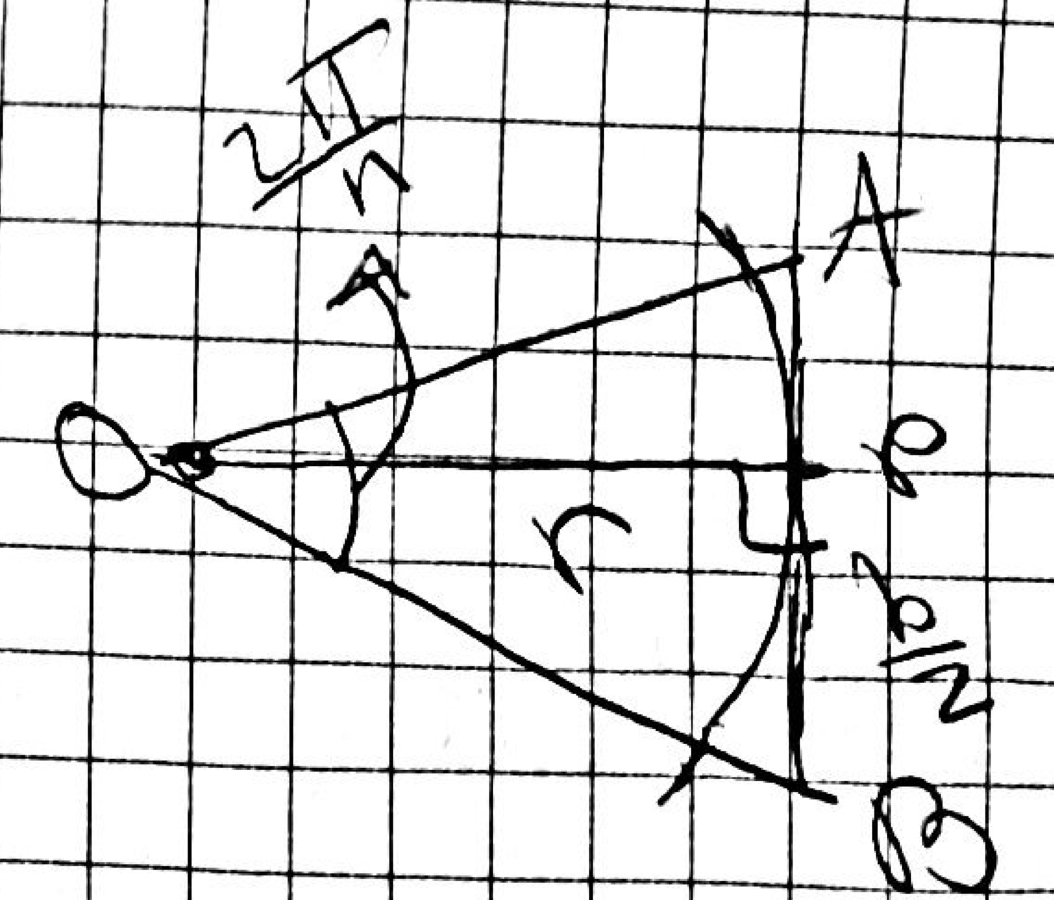
$$\pi r^2$$

$$\therefore \quad \pi r^2 \leq \text{área}(\bigcirc)$$

2. Ahora tomemos un polígono regular de n lados, de tal manera que el círculo esté inserto en éste.



Tomemos un triángulo OAB del polígono



Sabemos que el $\measuredangle BOA = \frac{2\pi}{n}$ y llamemos

$|AB| = b$.

$|OP| = r$

Como $|AB| = b$, entonces $|PB| = \frac{b}{2}$.

El $\triangle OPB$ es rectángulo y $\measuredangle BOP = \frac{\pi}{n}$, así tenemos que $\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\frac{b}{2}}{r} \Rightarrow$

$b = 2r\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Por lo tanto el área $(\triangle OAB) = \frac{2r\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot r}{2}$

$= r^2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Así tenemos que el área del polígono es: área $(⬡) = n r^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$

El área límite del polígono regular es una cota superior del área del círculo.

De lo cual tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} n r^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = r^2 \lim_{n\to\infty} n \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} =$$

$$r^2 \lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \cancel{\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}}^{\to 1} =$$

$$\pi r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = \pi r^2$$

Por lo tanto $A(C) \leq \pi r^2$

$\therefore$ $A(C) = \pi r^2$ //

Calcular $\underline{S}_R f$ y $\overline{S}_R f$ para

$f(x,y) = 3x^2 + 2y$ y $R = [0,2] \times [0,1]$

Primero recordemos que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{I} \quad y$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{II}$$

$\left.\right\}$ $\star$

Primero tomemos una partición P para el intervalo $[0,2]$, donde

$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y $|x_i - x_{i-1}| = \frac{2-0}{2n} = \frac{1}{n}$

así tenemos que

$$x_i = \frac{i}{n} \quad (a) \quad y$$

$$x_{i-1} = \frac{i-1}{n} \quad (b)$$

$\left.\right\}$ (1)

Para $[0,1]$ consideremos una partición $P=\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ con longitud $\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$ de esta manera

Se tiene que $y_j=\frac{j}{n}$ y $y_{j-1}=\frac{j-1}{n}$ 2

Así para cada rectángulo R_{ij}, tenemos que

la función es creciente

$$M_{ij}=\sup\{f(x_{ij}) \mid x_{ij}\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\}= 3x_i^2+2y_j$$

y

$$m_{ij}=\sup\{f(x_{ij}) \mid x_{ij}\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\}=3x_{i-1}^2+2y_{j-1}$$

Por lo tanto tenemos que

$$S(f,P)=\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n}(3x_{i-1}^2+2y_{j-1})\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n}\left(3\left(\frac{i-1}{n}\right)^2+2\left(\frac{j-1}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)=$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n}\left(3\left(\frac{i-1}{n}\right)^2+2\left(\frac{j-1}{n}\right)\right)=$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{3}{n^2}(i^2-2i+1)+2\left(\frac{j-1}{n}\right)\right)=$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3i^2-6i+3}{n}+2j-2\right)=$$

$$\left(\frac{1}{n^3}\right)\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{3i^2-6i+3}{n}+2j-2\right)=$$

$$\left(\frac{1}{n^4}\right)\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n}\left(3i^2-6i+3+2jn-2n\right) \overset{\mathrm{I}}{=}$$

$$\left(\frac{1}{n^{\cancel{4}3}}\right)\sum_{i=1}^{2n}\left[\cancel{n}\left(3i^2-6i+3-2n\right)+\cancel{2}n\left(\frac{n(n+1)}{\cancel{2}}\right)\right]=$$

$$\left(\frac{1}{n^3}\right)\sum_{i=1}^{2n}\left(3i^2-6i+3-2n+n(n+1)\right) \overset{\mathrm{I}\ y\ \mathrm{II}}{=}$$

$$\left(\frac{1}{n^3}\right)\left[\cancel{3}\left(\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{\cancel{6}}\right)-6\left(\frac{2n(2n+1)}{\cancel{2}}\right)+3(2n)\right.$$
$$\left.-2n(2n)+2n(n(n+1))\right]=$$

$$\left(\frac{1}{n^3}\right)\left[n\underbrace{(2n+1)}(4n+1)-6n\underbrace{(2n+1)}+6n-4n^2+\right.$$
$$\left.2n^2(n+1)\right]=\frac{1}{n^2}\left[(2n+1)\left[4n+1-6\right]+6-4n+\right.$$
$$\left.2n(n+1)\right]=\frac{1}{n^2}\left[(2n+1)(4n-5)+6-4n+2n^2+2n\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}\left[8n^2-10n+\cancel{4n}-5+6-\cancel{4n}+2n^2+2n\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}\left[10n^2-8n+1\right]=10-\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}$$

$$\therefore \underline{\int}_R f=\sup\{\underline{S}(f,P)\}=\lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,P)=\lim_{n\to\infty}10-\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}$$
$$=10$$

Por otro lado tenemos que

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n} (3x_i^2 + 2y_j)\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\stackrel{①②}{=} \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n} \left(\left(3\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{j}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n}\left(3\frac{i^2}{n^2} + \frac{2j}{n}\right) =$$

$$\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{3}{n}\right)i^2 + 2j\right) \stackrel{I}{=}$$

$$\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{3i^2}{\cancel{n}}\right)\cancel{n} + \frac{\cancel{2}(n(n+1))}{\cancel{2}} =$$

$$\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{2n}\left(3i^2 + n(n+1)\right) \stackrel{II}{=}$$

$$\frac{1}{n^3}\left[3\left(\frac{2n(4n+1)(2n+1)}{6}\right) + 2n^2(n+1)\right] =$$

$$\frac{1}{n^3}\left[n(4n+1)(2n+1) + 2n^2(n+1)\right] =$$

$$\frac{1}{n^2}\left[(4n+1)(2n+1) + 2n(n+1)\right] =$$

$$\frac{1}{n^2}\left[8n^2+4n+2n+1+2n^2+2n\right]=$$

$$\frac{1}{n^2}\left[10n^2+8n+1\right]=10+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}$$

$$\therefore \overline{\int_R} f=\sup\{\overline{S}(P,P)\}=\lim_{n\to\infty}\overline{S}(P,P)=$$

$$\lim_{n\to\infty} 10+\cancel{\frac{8}{n}}^{\,0}+\cancel{\frac{1}{n^2}}^{\,0}=\underline{\underline{10}}$$

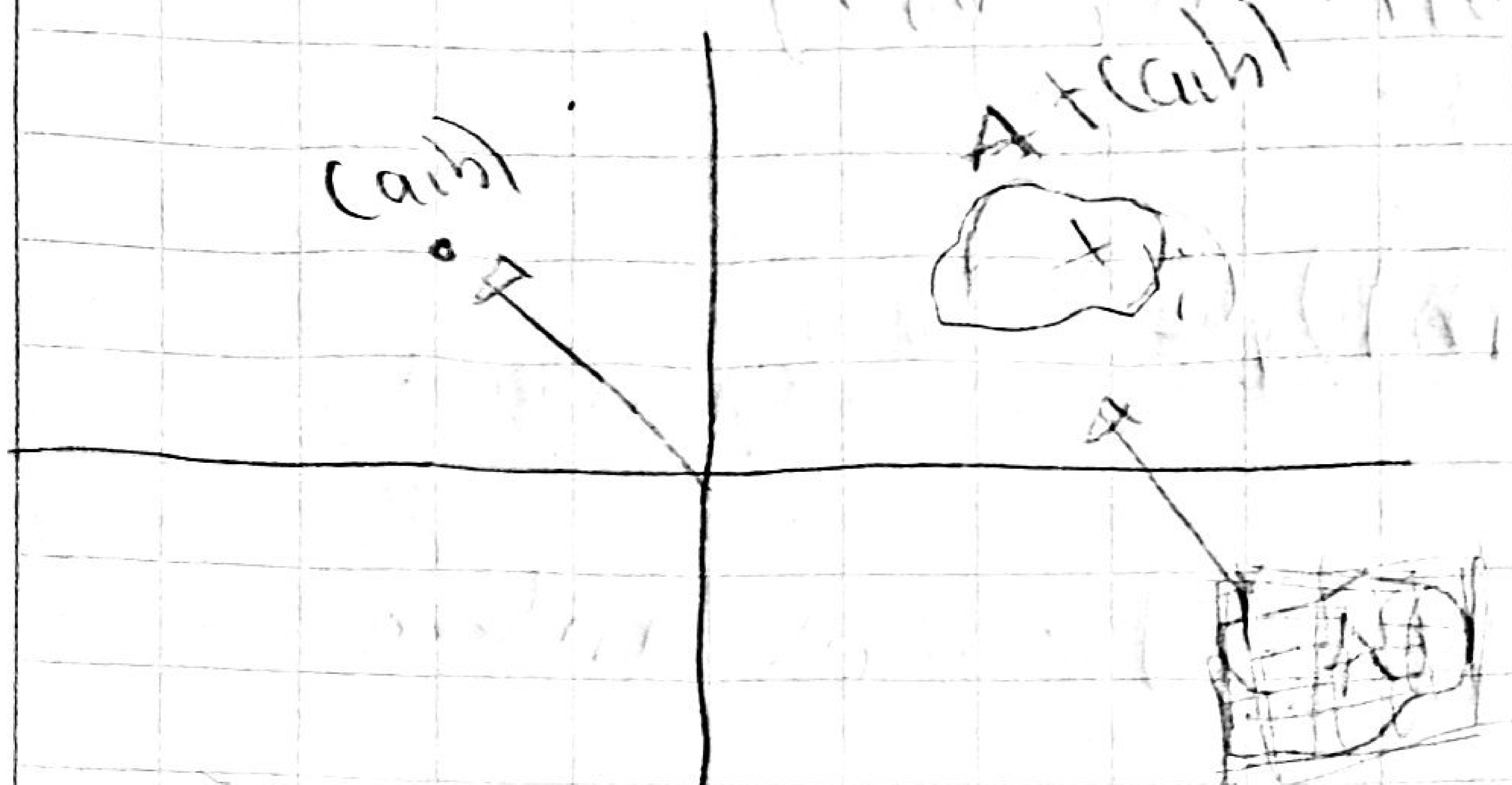
$$\therefore \underline{\int_R} f=\overline{\int_R} f=10=\underline{\underline{\int_R f}}$$

(7) Área bajo traslaciones.

Sea A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$ y sea $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, entonces el conjunto

$$A+(a,b)=\{(x+a,y+b)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y)\in A\}$$

representa la traslación de A por el punto (a,b)



Tomemos una cubertura Q de A, arbitraria, donde $Q=\bigcup_n Q_n$. Donde Q_n es un rectángulo.

Notemos lo siguiente

(1) $Q_n+(a,b)$ es un rectángulo

(2) $\text{área}(Q+(a,b))=\text{área}(Q)$

(3) $[A+(a,b)]+(c,d)=A+(a+c,b+d)$

Entonces $(\bigcup_n Q_n + (a,b))$ es una cobertura de $A + (a,b)$, así

$$\text{área}[A+(a,b)] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{área}(Q_n+(a,b)) =$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \text{área}(Q_n)}, \quad \text{I}$$

Pero área(A) es el ínfimo de las sumas de área (Q_n) (de I) ent.

$$\boxed{\text{área}[A+(a,b)] \leq \text{área}(A)}.$$

Ahora consideremos la traslación de regreso

$$\text{área}(A) \overset{3}{=} \text{área}([A+(a,b)]+(-a,-b)) \leq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{área}((Q_n+(a,b))+(-a,-b)) \overset{2}{=}$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \text{área}(Q_n+(a,b))}, \quad \text{i}$$

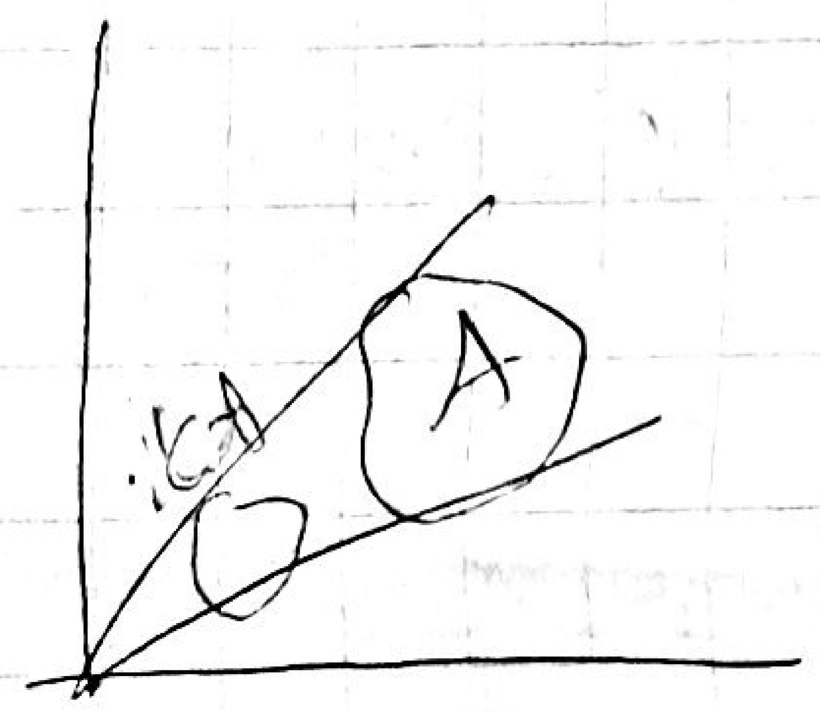
Pero el área de $(A+(a,b))$ es el ínfimo de i así tenemos que

$$\boxed{\text{área}(A) \leq \text{área}(A+(a,b))}$$

$\therefore$ área $(A) \leq$ área $(A + (a,b))$ //

(+) Área bajo dilataciones.

Sea $k>0$ un real y $A \subset \mathbb{R}^2$, entonces el conjunto $kA = \{(ka, kb) \in \mathbb{R}^2 \mid (a,b) \in A\}$ representa la dilatación de A por k.



¿Que relación hay entre el área de A y el área de kA?

Q_n's

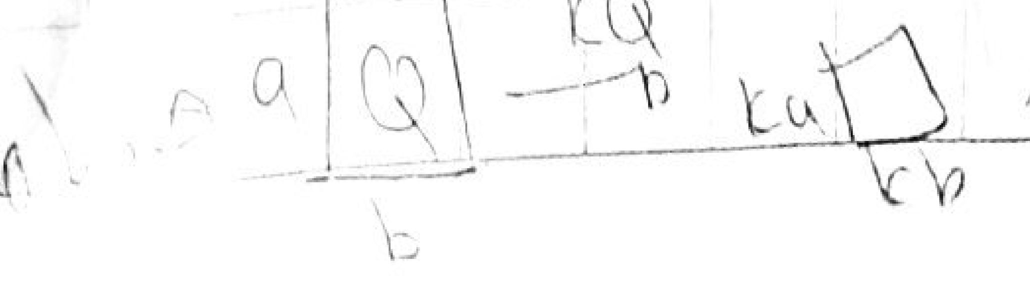
Tomemos una cubierta de rectángulos de A, llamemosla $\bigcup_n Q_n = Q$

Notemos que:

① $k(cA) = (kc)A$ con $k, c > 0$ reales

② kQ_n es un rectángulo

③ área $(kQ_n) = k^2$ área (Q_n) $\forall$ rectángulo Q_n



$\leadsto ka \cdot kb = k^2 ab$

P.D. $\text{área}(kA) = k^2\,\text{área}(A)$

Tomemos a nuestra cobertura Q, entonces $\bigcup_n (kQ_n)$ es una cubierta de kA, así (i)

tenemos que $\text{área}(kA) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{área}(kQ_n) = k^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\text{área}(Q_n)\right)$.

Como área A es el ínfimo de las sumas (i)

ent. tenemos que $\boxed{\text{área}(kA) \leq k^2\,\text{área}(A)}$. (1)

(1) Ahora tomemos:

$\text{Área}(A) = \text{área}\left(\frac{1}{k}\cdot(kA)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{área}\,\frac{1}{k}(kQ_n) \leq$

$\frac{1}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty}\text{área}(kQ_n) \rightarrow$ (ii)

Como el área de kA es el ínfimo de las sumas de (ii) tenemos que

$\text{área}(A) \leq \frac{1}{k^2}\,\text{área}(kA) \Rightarrow$

$\boxed{k^2\,\text{área}(A) \leq \text{área}(kA)}$ (2)

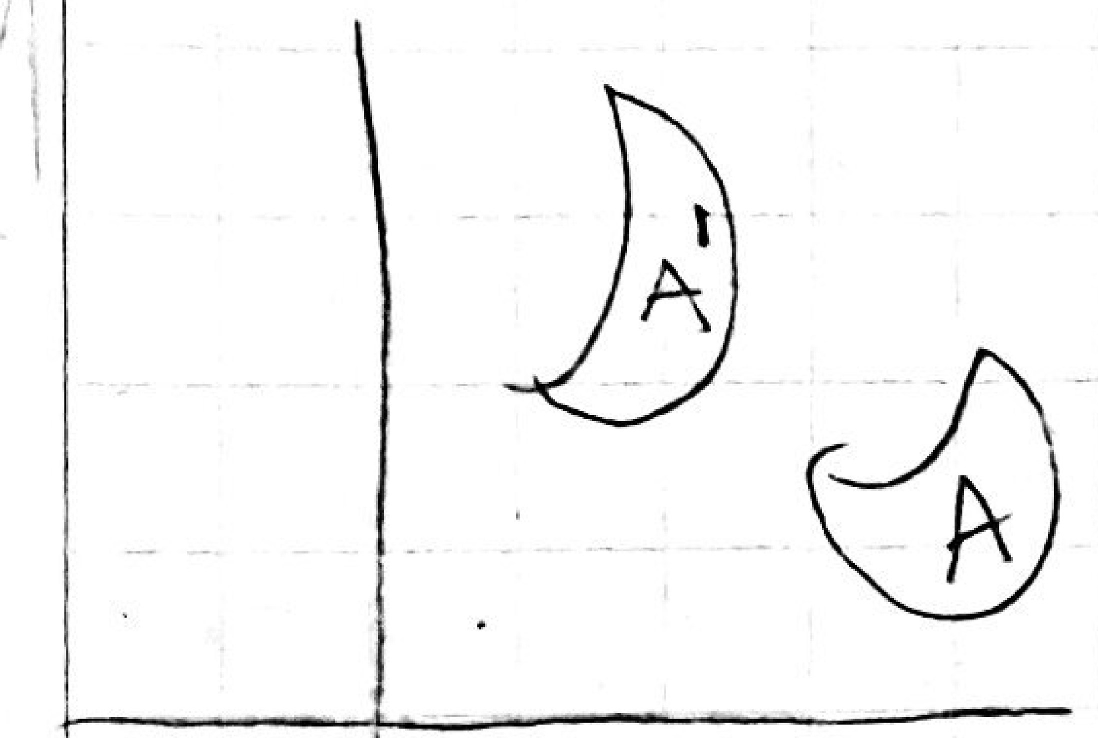
Así por (1) y (2) tenemos que

$\text{área}(kA) = k^2\,\text{área}(A)$ //

(7) Área bajo rotaciones.

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$, si A es rotado un cierto ángulo menor que $\frac{\pi}{2}$ digamos θ, en A', entonces

$\text{área}(A) = \text{área}(A')$



Tomemos una cobertura $Q = \bigcup_n Q_n$

Donde Q_n es un rectangulo.

llamemos Q_n' a la rotación de Q_n bajo $-\theta$.

(1) $\text{área } Q_n = \text{área } Q_n'$

(2) Q_n' es un rectángulo

llamemos Q_n' la rotación bajo θ de Q_n, entonces

por (2) $\bigcup_n Q_n$ es una cubierta rectangular de A'

en 1. $\text{area}(Q_n) = \text{area}(Q_n') \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{área}(Q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{área}(Q_n') \quad (I)$$ sabemos que

$$\text{area}(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \text{área}(Q_n) \overset{(I)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \text{area}(Q_n') \quad (i)$$ pero sabemos

que el área de área (A') es el infimo de (i)

$\text{area}(A) \le \text{area}(A')$ (a)

Ahora tenemos

$$\text{area}(A') \leq \sum_{n\geq 1}^{\infty} \text{area}(Q'_n) \stackrel{①}{=} \sum_{n\geq 1}^{\infty} \text{area}(Q_n)$$ pero

sabemos que el area de A es el infimo de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{area}(Q_n)$$

$\therefore$ area $(A') \leq$ area(A) ⓑ

$\therefore$ por ⓐ y ⓑ tenemos que

$$\text{area } A = \text{area } A'$$ //