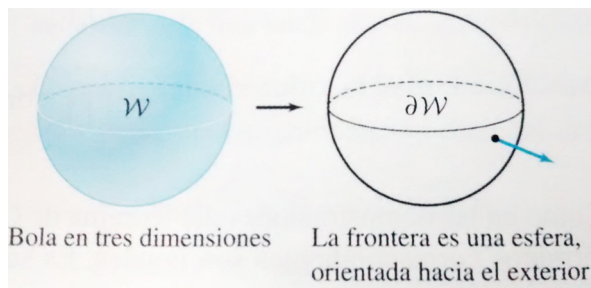
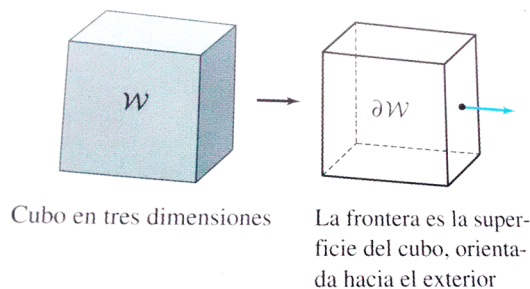


Sea $S = Fr(W)$ una superficie cerrada que limita una región en el espacio $W \subset \mathbb{R}^3$

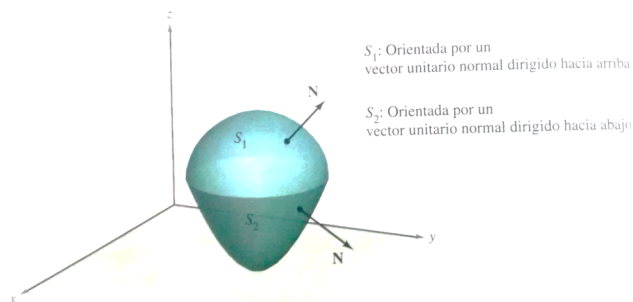


El teorema de la divergencia (también conocido como teorema de Gauss) es una generalización del teorema de Green, que relaciona una integral de superficie sobre una superficie $S = Fr(W)$ cerrada con una integral de volumen sobre una región sólida W .



Teorema de la divergencia

Teorema 1. Sea W una región sólida limitada o acotada por una superficie cerrada $S = Fr(W)$, orientada por un vector unitario normal dirigido hacia el exterior de W . si F es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en Q entonces



$$\iint_S F \cdot N \, dA = \iiint_W \operatorname{div} F \, dv$$

Demostración. Si hacemos $F(x, y, z) = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ entonces

$$\int \int_S F \cdot N \, dA = \int \int_S P\hat{i} \cdot N + Q\hat{j} \cdot N + R\hat{k} \cdot N \, dA = \int \int_S P\hat{i} \cdot N + \int \int_S Q\hat{j} \cdot N + \int \int_S R\hat{k} \cdot N \, dA$$

Por otro lado

$$\int \int \int_W \operatorname{div} F \, dv = \int \int \int_W \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \int \int \int_W \frac{\partial P}{\partial x} dV + \int \int \int_W \frac{\partial Q}{\partial y} dV + \int \int \int_W \frac{\partial R}{\partial z} dV$$

necesitamos probar

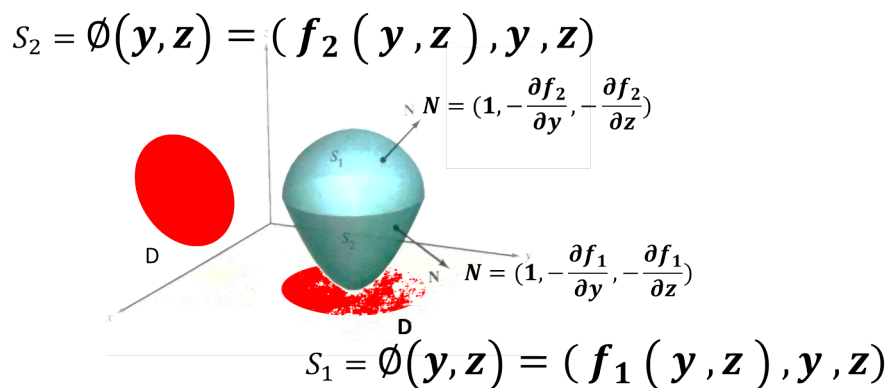
$$\int \int_S P\hat{i} \cdot N \, dA = \int \int \int_W \frac{\partial P}{\partial x} dV \dots (1)$$

$$\int \int_S Q\hat{j} \cdot N \, dA = \int \int \int_W \frac{\partial Q}{\partial y} dV \dots (2)$$

$$\int \int_S R\hat{k} \cdot N \, dA = \int \int \int_W \frac{\partial R}{\partial z} dV \dots (3)$$

Demostración (1)

Supongamos que nuestra región W es tal que $W = S_1 \cup S_2$, donde S_1 y S_2 al ser regiones tipo III las podemos ver como la gráfica de una función $f(y, z)$.



Con S_1 la superficie que se puede parametrizar $(f_1(y, z), y, z)$, S_2 la otra superficie que se puede parametrizar $(f_2(y, z), y, z)$ donde también suponemos a D como la proyección tanto de S_1 como de S_2 . Se tiene entonces que

$$\int \int_D P\hat{i} \cdot N \, dA = \int \int_D P\hat{i} \cdot N_{s_1} \, dA + \int \int_D P\hat{i} \cdot N_{s_2} \, dA$$

en el caso s_1 se tiene para la parametrización $(f_1(y, z), y, z)$

$$N_{s_1} = \left(-1, -\frac{\partial f_1}{\partial y}, -\frac{\partial f_1}{\partial z} \right)$$

por lo tanto en S_1

$$\int \int_D \hat{P} \cdot N_{s_1} dA = \int \int_D P(f_1(y, z), y, z)(1, 0, 0) \cdot \left(1, -\frac{\partial f_1}{\partial y}, -\frac{\partial f_1}{\partial z}\right) dA = - \int \int_D P(f_1(y, z), y, z) dA$$

y en S_2

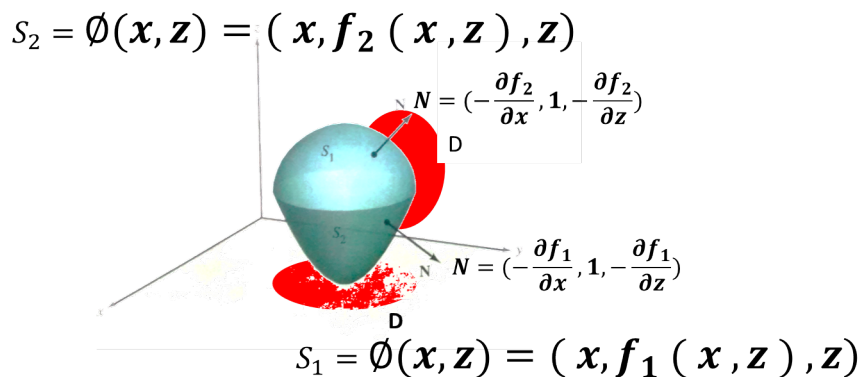
$$\int \int_D \hat{P} \cdot N_{s_2} dA = \int \int_D P(f_1(y, z), y, z)(1, 0, 0) \cdot \left(-1, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, -\frac{\partial f_2}{\partial z}\right) dA = \int \int_D P(f_2(y, z), y, z) dA$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} \int \int_D \hat{P} \cdot N dA &= \int \int_D \hat{P} \cdot N_{s_1} dA + \int \int_D \hat{P} \cdot N_{s_2} dA = - \int \int_D P(f_1(y, z)) dA + \int \int_D P(f_2(y, z), y, z) dA \\ &= \int \int_D (P(f_2(y, z), y, z) - P(f_1(y, z), y, z)) dA = \int \int \left(\int_{f_1(y, z)}^{f_2(y, z)} \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dA = \int \int \int_W \frac{\partial P}{\partial x} dV \end{aligned}$$

Demostración (2)

Supongamos que nuestra región W es tal que $W = S_1 \cup S_2$, donde S_1 y S_2 las podemos ver como la gráfica de una función $f(x, y)$.



Con S_1 la superficie que se puede parametrizar $(x, f_1(y, z), z)$, S_2 la otra superficie que se puede parametrizar $(x, f_2(y, z), z)$ donde también suponemos a D como la proyección tanto de S_1 como de S_2 .

Se tiene entonces que

$$\int \int_D \hat{Q} \cdot N dA = \int \int_D \hat{Q} \cdot N_{s_1} dA + \int \int_D \hat{Q} \cdot N_{s_2} dA + \int \int_D \hat{Q} \cdot N_{s_2} dA$$

en el caso s_1 se tiene para la parametrización $(x, f_1(y, z), z)$

$$N_{s_1} = \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x}, -1, -\frac{\partial f_1}{\partial z},\right)$$

por lo tanto en S_1

$$\int \int_D \hat{Q} \cdot N_{s_1} dA = \int \int_D Q(x, f_1(y, z), z)(0, 1, 0) \cdot \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x}, -1, -\frac{\partial f_1}{\partial z}\right) dA = - \int \int_D Q(x, f_1(y, z)) dA$$

y en S_2

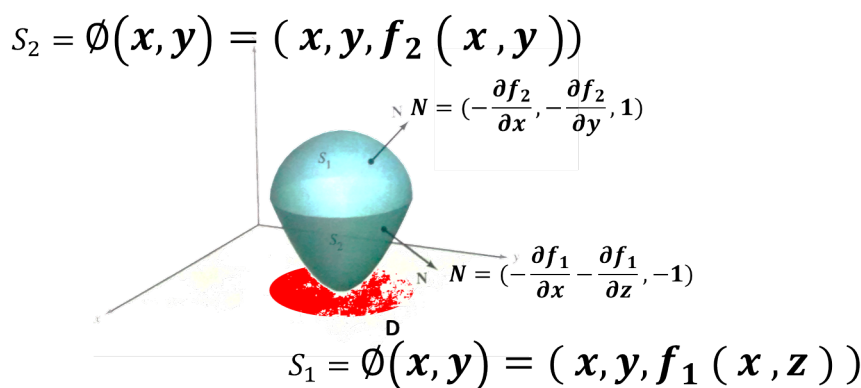
$$\int \int_D Q \hat{j} \cdot N_{s_2} dA = \int \int_D Q(x, f_2(y, z), z) (0, 1, 0) \cdot \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}, 1, -\frac{\partial f_2}{\partial z} \right) dA = \int \int_D Q(x, f_2(y, z)) dA$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} \int \int_D Q \hat{j} \cdot N dA &= \int \int_D Q \hat{j} \cdot N_{s_1} dA + \int \int_D Q \hat{j} \cdot N_{s_2} dA = - \int \int_D Q(x, f_1(y, z), z) dA + \int \int_D Q(x, f_1(y, z), z) dA \\ &= \int \int_D (Q(x, f_1(y, z), z) - Q(x, f_1(y, z), z)) dA = \int \int \left(\int_{f_1(y, z)}^{f_2(y, z)} \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) dA = \int \int \int_W \frac{\partial Q}{\partial y} dV \end{aligned}$$

Demostración (3)

Supongamos que nuestra región W es tal que $W = S_1 \cup S_2$, donde S_1 y S_2 las podemos ver como la gráfica de una función $f(x, y)$.



Con S_1 la superficie que se puede parametrizar $(x, y, f_1(x, y))$, S_2 la otra superficie que se puede parametrizar $(x, y, f_2(x, y))$ donde también suponemos a D como la proyección tanto de S_1 como de S_2 .

Se tiene entonces que

$$\int \int_D R \hat{k} \cdot N dA = \int \int_D R \hat{k} \cdot N_{s_1} dA + \int \int_D R \hat{k} \cdot N_{s_2} dA + \int \int_D R \hat{k} \cdot N_{s_3} dA$$

en el caso s_1 se tiene para la parametrización $(x, y, f_1(x, y))$

$$N_{s_1} = \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x}, -\frac{\partial f_1}{\partial y}, -1 \right)$$

por lo tanto para S_1

$$\int \int_D R \hat{k} \cdot N_{s_1} dA = \int \int_D R(0, 0, 1) \cdot \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x}, -\frac{\partial f_1}{\partial y}, -1 \right) dA = - \int \int_D R(x, y, f_1(x, y)) dA$$

y en S_2

$$\int \int_D R \hat{k} \cdot N_{s_2} dA = \int \int_D R(0, 0, 1) \cdot \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x}, -\frac{\partial f_1}{\partial y}, 1 \right) dA = \int \int_D R(x, y, f_2(x, y)) dA$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} \int \int_D R \hat{k} \cdot N \, dA &= \int \int_D R \hat{k} \cdot N_{s_1} \, dA + \int \int_D R \hat{k} \cdot N_{s_2} \, dA = - \int \int_D R(x, y, f_1(x, y)) \, dA + \int \int_D R(x, y, f_2(x, y)) \, dA \\ &= \int \int_D (R(x, y, f_2(x, y)) - R(x, y, f_1(x, y))) \, dA = \int \int \left(\int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} \, dz \right) dA = \int \int \int_W \frac{\partial R}{\partial z} \, dV \end{aligned}$$

Por lo tanto

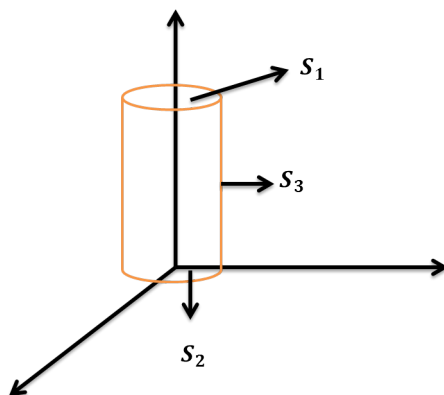
$$\int \int_S F \cdot N \, dA = \int \int \int_W \operatorname{div} F \, dV$$

□

Ejemplo Verifique el teorema de la divergencia, calculando el flujo del campo vectorial $F(x, y, z) = (xz, -y^2, xz)$ a través de la superficie cerrada que limita el cilindro

$$x^2 + y^2 \leq R^2 \quad \text{con} \quad 0 \leq z \leq 3$$

Solución Para calcular el flujo, consideramos $Q = s_1 \cup s_2 \cup s_3$ y parametrizamos cada una de ellas



Para s_1 se tiene la parametrización

$$f_1 : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{dada por} \quad f_1(x, y) = (x, y, 3)$$

donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

por lo tanto

$$N_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} \times \frac{\partial f_1}{\partial y} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

el campo evaluado en la parametrización

$$F(f_1(x, y)) = F(x, y, 3) = (3x, -y^2, 3x)$$

y el flujo nos queda

$$\int_{s_1} F \cdot N_1 \, ds_1 = \int \int_D F(f_1(x, y)) \cdot N_1(x, y) \, dx dy = \int \int_D (3x, -y^2, 3x) \cdot (0, 0, 1) \, dx dy = \int \int_D 3x \, dx dy$$

usaremos coordenadas cilindricas

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \operatorname{sen}(\theta), \quad z = z$$

donde

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} = \det \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ -\rho \operatorname{sen}(\theta) & \rho \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

por lo tanto

$$\int \int_D 3x \, dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R 3\rho^2 \cos(\theta) d\rho d\theta = 0$$

Para s_2 se tiene la parametrización

$$f_1 : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{dada por } f_2(x, y) = (x, y, 0)$$

donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

por lo tanto

$$N_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x} \times \frac{\partial f_2}{\partial y} = (0, 0, -1)$$

el campo evaluado en la parametrización

$$F(f_2(x, y)) = F(x, y, 0) = (0, -y^2, 0)$$

y el flujo nos queda

$$\int_{s_2} F \cdot N_2 \, ds_2 = \int \int_D F(f_2(x, y)) \cdot N_2(x, y) \, dx dy = \int \int_D (0, -y^2, 0) \cdot (0, 0, -1) \, dx dy = 0$$

Para s_3 se tiene la parametrización

$$f_3 : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{dada por } f_3(x, y) = (R \cos(u), R \operatorname{sen}(u), v)$$

donde

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \in [0, 2\pi] \quad v \in [0, 3]\}$$

por lo tanto

$$N_3 = \frac{\partial f_3}{\partial u} \times \frac{\partial f_3}{\partial v} = (-R \operatorname{sen}(u), R \cos(u), 0) \times (0, 0, 1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -R \operatorname{sen}(u) & R \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (R \cos(u), R \operatorname{sen}(u), 0)$$

el campo evaluado en la parametrización

$$F(f_3(u, v)) = F(R \cos(u), R \operatorname{sen}(u), v) = (vR \cos(u), -R^2 \operatorname{sen}^2(u), vR \cos(u))$$

y el flujo nos queda

$$\begin{aligned} \int_{s_3} F \cdot N_3 \, ds_3 &= \int \int_D F(f_3(u, v)) \cdot N_3 \, dudv = \int \int_D (vR \cos(u), -R^2 \sin^2(u), vR \cos(u)) \cdot (R \cos(u), R \sin(u), 0) \, dudv \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} R^2 v \cos^2(u) - R^3 \sin^3(u) \, dudv = \frac{9}{2} \pi R^2 \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\operatorname{div} F = z - 2y + x$$

de esta manera

$$\int \int \int_Q \operatorname{div} F \, dV = \int \int \int_Q (z - 2y + x) \, dV$$

usando de nuevo coordenadas cilindricas

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta), \quad z = z$$

por lo tanto

$$\int \int \int_Q (z - 2y + x) \, dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^3 (z - 2\rho \sin(\theta) + \rho \cos(\theta)) \, dz \, d\theta \, d\rho = \frac{9}{2} \pi R^2$$