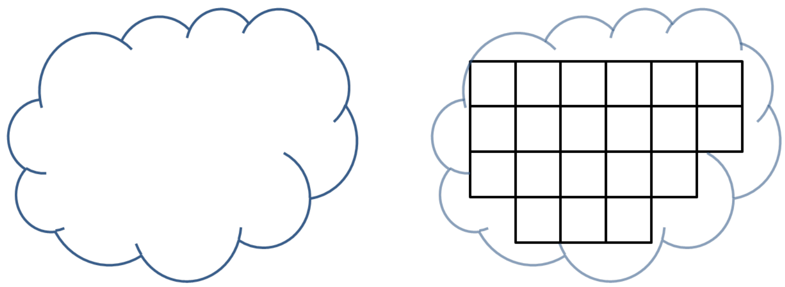
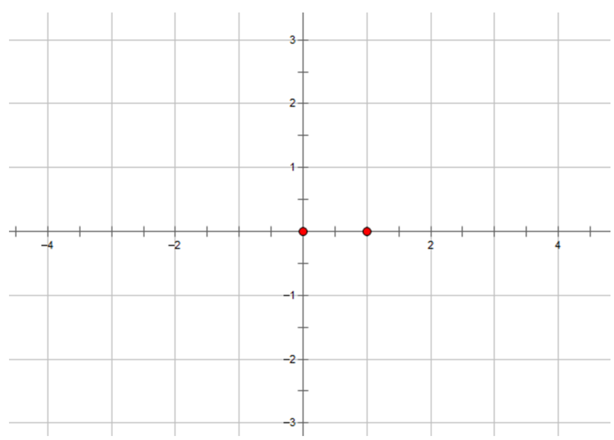
Área

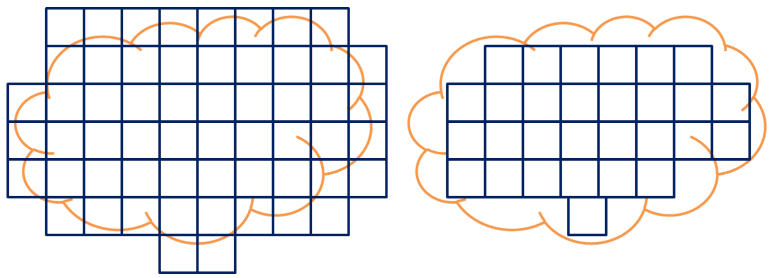
La noción intuitiva de área de una región en el plano es el número de unidades cuadradas contenidas en la región.



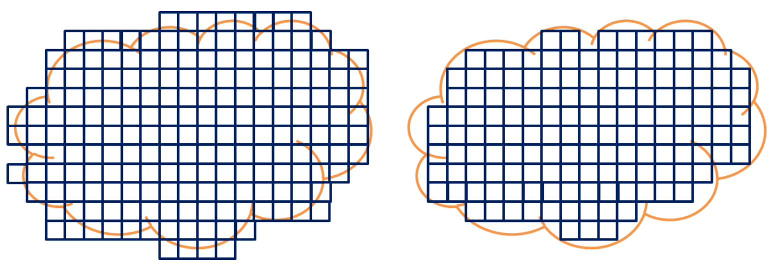
Al definir área aceptaremos que el área $A(S)$ de un conjunto debe ser un número no negativo con las propiedades siguientes:
1) Si S es un cuadrado de lado K entonces $A(S) = K^2$
2) El área del todo es la suma de las áreas de sus partes.
Más precisamente si S consiste de los conjuntos que no se traslapan S_1,...,S_n de áreas $A(S_1)$,...,$A(S_n)$ respectivamente, entonces el área de S es $A(S) = A(S_1)$+...+$A(S_n)$.
Los cuadrados congruentes proporcionan la manera más fácil de cubrir el plano sin espacios vacíos o traslapes.
Usaremos la rejilla asociada al sistema coordenado proporcionada por las rectas $x = 0, \pm1, \pm2,...$ $y = 0, \pm1, \pm2,...$ la cual divide al plano en cuadrados de lado 1.



Denotamos $A_0^+(S)$ el número de cuadrados que tienen puntos en común con S y $A_0^-(S)$ el número de aquellos que están completamente contenidos en S



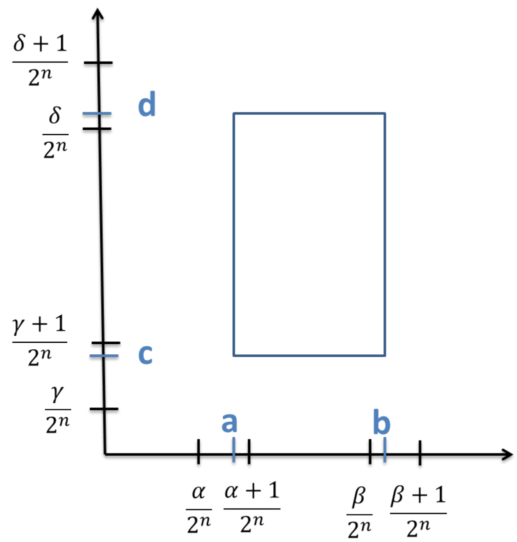
Dividamos ahora cada cuadrado en 4 partes iguales de lado $\frac{1}{2}$ y área $\frac{1}{4}$. Sea $A_1^+(S)$ la cuarta parte del número de aquellos subcuadrados que tienen puntos en común con S y $A_1^-(S)$ la cuarta parte de aquellos completamente contenidos en S.



Se tiene que $A_0^-(S) \leq A_1^-(S)$ y de modo semejante $A_0^+(S) \geq A_1^+(S)$, al continuar dividiendo cada cuadrado de lado $\frac{1}{2}$ en 4 cuadrados de lado $\frac{1}{4}$. Un dieciseisavo de esos cuadrados que tienen puntos en común con S y un dieciseisavo de esos cuadrados que estan completamente contenidos en S, se denotaran por $A_2^+(S)$ y $A_2^-(S)$.
Procediendo de esta forma se asocian los valores $A_n^+(S)$ y $A_n^-(S)$ con una división en cuadrados de lado 2^n.
Es evidente que los valores $A_n^+(S)$ forman una sucesión monótona decreciente y acotada que converge hacia un valor $A^+(S)$, mientras que los valores $A_n^-(S)$ crecen monotonamente y convergen hacia un valor $A^-(S)$.
El valor $A^-(S)$ representa el área interior, lo mejor que puede aproximarse el área de S desde abajo por medio de cuadrados congruentes contenidos en S, el área exterior $A^+(S)$ representa la mejor cota superior obtenible cubriendo a S por medio de cuadrados congruentes.
Podemos denotar $A_n^- = \sum\limits_{ik} 2^{-2n}$ con $R_{ik} \subset S$, $A_n^+ = \sum\limits_{ik} 2^{-2n}$ con $R_{ik} \cap S \neq \emptyset$ a partir de la definición resulta $0 \leq A_n^- \leq A_n^+$.
Las sumas A_n^- forman una sucesión no decreciente con la cota superior A_1^+ así, convergen hacia un limite $A^- = \lim\limits_{n\to\infty} A_n^-$.
De manera semejante Las sumas A_n^+ forman una sucesión no creciente con la cota superior A_1^- así, convergen hacia un limite $A^+ = \lim\limits_{n\to\infty} A_n^+$.
Si ambos valores concuerdan se dice que S es mesurable según Jordan y el valor común $A^-(S) = A^+(S)$ se llama contenido, o medida de Jordan de S.

Ejemplo Para cualquier rectángulo S con lados paralelos a los ejes coordenados,
$S : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$. Se tiene que

$$A^{+} = A^{-} = (b-a)(c-d)$$



Dado un entero positivo n, se pueden encontrar enteros $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tales que

$$\alpha < a2^n \leq \alpha + 1 \qquad \gamma < c2^n \leq \gamma + 1$$

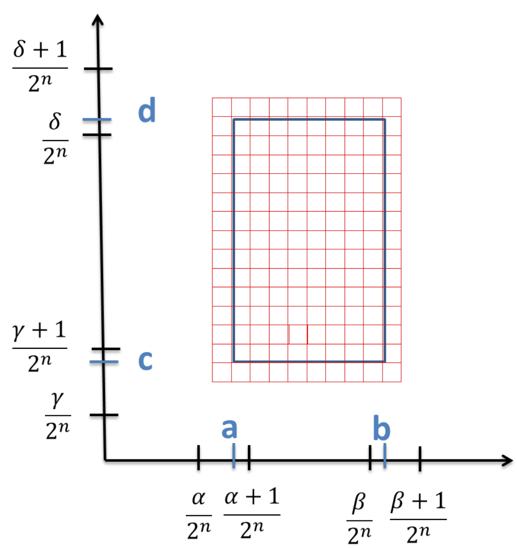
$$\beta \leq b2^n < \beta + 1 \qquad \delta \leq d2^n < \delta + 1$$

por lo tanto

$$\frac{\alpha}{2^n} < a \leq \frac{\alpha+1}{2^n} \qquad \frac{\gamma}{2^n} < c \leq \frac{\gamma+1}{2^n}$$

$$\frac{\beta}{2^n} \leq b < \frac{\beta+1}{2^n} \qquad \frac{\delta}{2^n} \leq d < \frac{\delta+1}{2^n}$$

Usando una rejilla adecuada de longitud 2^n tenemos que



$$\frac{\beta}{2^n} - \frac{\alpha+1}{2^n} + \frac{2}{2^n} \leq b - a + \frac{2}{2^n}$$

$$\frac{\beta+1}{2^n} - \frac{\alpha}{2^n} - \frac{2}{2^n} \geq b - a - \frac{2}{2^n}$$

Analogamente

$$\frac{\delta}{2^n} - \frac{\gamma+1}{2^n} + \frac{2}{2^n} \leq d - c + \frac{2}{2^n}$$

$$\frac{\delta+1}{2^n} - \frac{\gamma}{2^n} - \frac{2}{2^n} \geq d - c - \frac{2}{2^n}$$

Por lo tanto

$$A_n^{+} = \left(\frac{\beta}{2^n} - \frac{\alpha+1}{2^n} + \frac{2}{2^n}\right)\left(\frac{\delta}{2^n} - \frac{\gamma+1}{2^n} + \frac{2}{2^n}\right)$$

$$A_n^{-} = \left(\frac{\beta+1}{2^n} - \frac{\alpha}{2^n} - \frac{2}{2^n}\right)\left(\frac{\delta+1}{2^n} - \frac{\gamma}{2^n} - \frac{2}{2^n}\right)$$

De la desigualdad

$$A_n^{-} \leq A \leq A_n^{+}$$

tenemos que

$$\left(\frac{\beta+1}{2^n}-\frac{\alpha}{2^n}-\frac{2}{2^n}\right)\left(\frac{\delta+1}{2^n}-\frac{\gamma}{2^n}-\frac{2}{2^n}\right)\leq A\leq\left(\frac{\beta}{2^n}-\frac{\alpha+1}{2^n}+\frac{2}{2^n}\right)\left(\frac{\delta}{2^n}-\frac{\gamma+1}{2^n}+\frac{2}{2^n}\right)$$

como

$$\left(b-a-\frac{2}{2^n}\right)\left(d-c-\frac{2}{2^n}\right)\leq\left(\frac{\beta+1}{2^n}-\frac{\alpha}{2^n}-\frac{2}{2^n}\right)\left(\frac{\delta+1}{2^n}-\frac{\gamma}{2^n}-\frac{2}{2^n}\right)$$

$$\left(\frac{\beta}{2^n}-\frac{\alpha+1}{2^n}+\frac{2}{2^n}\right)\left(\frac{\delta}{2^n}-\frac{\gamma+1}{2^n}+\frac{2}{2^n}\right)\leq\left(b-a+\frac{2}{2^n}\right)\left(d-c+\frac{2}{2^n}\right)$$

entonces

$$\left(b-a-\frac{2}{2^n}\right)\left(d-c-\frac{2}{2^n}\right)\leq A_n^-\leq A\leq A_n^+\leq\left(b-a+\frac{2}{2^n}\right)\left(d-c+\frac{2}{2^n}\right)$$

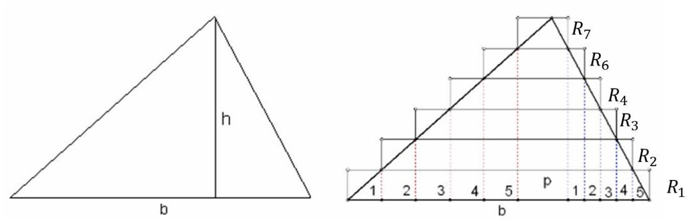
por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\left(b-a-\frac{2}{2^n}\right)\left(d-c-\frac{2}{2^n}\right)\leq\lim_{n\to\infty}A_n^-=A=\lim_{n\to\infty}A_n^+\leq\lim_{n\to\infty}\left(b-a+\frac{2}{2^n}\right)\left(d-c+\frac{2}{2^n}\right)$$

$A=\lim_{n\to\infty}A_n^+=\lim_{n\to\infty}A_n^-=(b-a)(d-c).$

Ejemplo Probar que el área de un triángulo de base b y altura h es $\dfrac{bh}{2}$

Demostración. Para ello vamos a dividir h en n partes iguales



y cada proyección sobre b genera una partición en n partes iguales (según la figura la partición de b es: {1,1},{2,2},{3,3},{4,4},{5,5},{p} que son el mismo número en que particionamos a h) por lo tanto tenemos los rectángulos:

$$R_1,\ldots,R_{n-1}$$

cuyas áreas son

$$R_1=b\cdot\frac{h}{n},\quad R_2=\left(b-\frac{b}{n}\right)\cdot\frac{h}{n},\quad R_3=\left(b-\frac{2b}{n}\right)\cdot\frac{h}{n},\ldots,R_n=\left(b-\frac{(n-1)b}{n}\right)\cdot\frac{h}{n}$$

Sumando las áreas se tiene

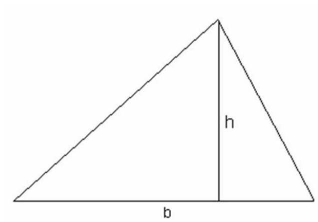
$$\sum_{k=1}^{n}R_k=b\cdot\frac{h}{n}+\left(b-\frac{b}{n}\right)\cdot\frac{h}{n}+\left(b-\frac{2b}{n}\right)\cdot\frac{h}{n}+\ldots+\left(b-\frac{(n-1)b}{n}\right)\cdot\frac{h}{n}=$$

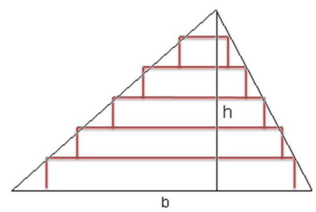
$$\frac{h}{n}\left[b+\frac{nb-b}{n}+\frac{nb-2b}{n}+...\frac{nb-(n-1)b}{n}\right]=\frac{bh}{n^2}\left[n+(n-1)+(n-2)+...+1\right]=\frac{bh}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

Por lo tanto el área exterior para el triángulo sera:

$$A^+=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}R_k=\lim_{n\to\infty}\frac{bh}{n^2}\left[\frac{(n)(n+1)}{2}\right]=\frac{hb}{2}$$

Ahora para el área interior se tiene





por lo tanto tenemos los rectángulos:

$$R_1,...,R_{n-1}$$

cuyas áreas son

$$R_1=R_1=\left(b-\frac{b}{n}\right)\cdot\frac{h}{n},\quad R_2=\left(b-\frac{2b}{n}\right)\cdot\frac{h}{n},...,R_{n-1}=\left(b-\frac{(n-1)b}{n}\right)\cdot\frac{h}{n}$$

Sumando las áreas se tiene

$$\sum_{k=1}^{n-1}R_k=\left(b-\frac{b}{n}\right)\cdot\frac{h}{n}+\left(b-\frac{2b}{n}\right)\cdot\frac{h}{n}+...+\left(b-\frac{(n-1)b}{n}\right)\cdot\frac{h}{n}=$$

$$\frac{h}{n}\left[\frac{nb-b}{n}+\frac{nb-2b}{n}+...\frac{nb-(n-1)b}{n}\right]=\frac{bh}{n^2}\left[(n-1)+(n-2)+...+1\right]=\frac{bh}{n^2}\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right]$$

Por lo tanto el área interior para el triángulo sera:

$$A^-=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}R_k=\lim_{n\to\infty}\frac{bh}{n^2}\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right]=\frac{hb}{2}$$

como $A^-=A^+$ entonces

$$A=\frac{hb}{2}$$

□

Definición 1. *Se dice que un conjunto acotado $S\subset\mathbb{R}^2$ es* ***mesurable según Jordan*** *si el área interior A^- y el área exterior A^+ de S coinciden. Se denorará el valor común por A y se le dará el nombre de área o mediada de Jordan de S*

$$A^+(S)=A^-(S)=A(S)$$

Definición 2. *R es un restángulo en $\mathbb{R}^n$ si es un conjunto de la forma*

$$R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

donde cada $[a_i, b_i]$ es un intervalo cerrado de números reales.
Al número

$$d(R) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}$$

lo llamaremos la diagonal de R.
Al número

$$m(R) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$$

se le llamará medida de R.

Se tiene que $m(R) \geq 0$ y en el caso de $\mathbb{R}^2$ esta medida es el área de R, mientras que en $\mathbb{R}^3$ esta medida es el volumen de R.