Gradiente de un Campo Escalar

Definición 1. *Consideremos una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida en U. Sea $x \in U$ y supongamos que en dicho punto existen todas las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{x_i}$ $i = 1, ..., n$.*
Se define el gradiente de f en el punto x como el vector

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{x_1}, \frac{\partial f}{x_2}, ..., \frac{\partial f}{x_n} \right)$$

Si f es una función escalar de clase c^1 definida en un abierto U, el gradiente es un campo vectorial continuo

Teorema 1. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase c^1 y $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria de clase c^1. Entonces*

$$\int_\alpha \nabla f = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$$

Demostración. Consideremos la función $g(t) : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = (f \circ \alpha)(t) = f(\alpha(t))$ que es de clase c^1 por se composición de funciones de clase c^1. Aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$g'(t) = (f \circ \alpha)'(t) = (f(\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t))' = \frac{\partial f(\alpha(t))}{x_1}\alpha_1'(t) + \frac{\partial f(\alpha(t))}{x_2}\alpha_2'(t) + ... + \frac{\partial f(\alpha(t))}{x_n}\alpha_n'(t) =$$

$$\nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$$

por lo tanto

$$\int_\alpha \nabla f = \int_a^b \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt = \int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a) = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$$

$\square$

Ejemplo Halle $\displaystyle\int_C F \cdot dr$ donde $F = (e^x sen(y) - y)\hat{i} + (e^x cos(y) - x - 2)\hat{j}$ y C es el camino dado por $c(t) = \left[t^3 sen[\frac{\pi}{2}t]\hat{i} - \frac{\pi}{2}cos[\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}]\hat{j} \right]$ para $[0, 1]$. El potencial es $f(x, y) = e^x sen(y) - xy - 2y$

Solución Tenemos que $c(0) = 0^3(sen\frac{\pi}{2}(0))\hat{i} - \frac{\pi}{2}cos(\frac{\pi}{2}(0) + \frac{\pi}{2})\hat{j} = 0\hat{i} + 0\hat{j}$

$f(c(0)) = f(0, 0) = e^0 sen(0) - 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$

$c(1) = 1^3 sen(\frac{\pi}{2})\hat{i} - \frac{\pi}{2}cos(\frac{\pi}{2}(1) + \frac{\pi}{2})\hat{j} = 1\hat{i} - \frac{\pi}{2}(-1)\hat{j} = 1\hat{i} + \frac{\pi}{2}\hat{j}$

$f(c(1)) = f(1, \frac{\pi}{2}) = e^1 sen(\frac{\pi}{2}) - 1(\frac{\pi}{2}) - 2(\frac{\pi}{2}) = e^1 - \frac{\pi}{2} - \pi = e - \frac{3}{2}\pi$

$\therefore \displaystyle\int_C F \cdot dr = f(c(1)) - f(0)) = e - \frac{3}{2}\pi - 0 = e - \frac{3}{4}\pi$

Corolario 1. *Si $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una trayectoria de clase C^1 y cerrada es decir $\alpha(b) = \alpha(a)$ entonces*

$$\int_\alpha \nabla f = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = 0$$

Campos conservativos y función potencial

Definición 2. *Un campo vectorial continuo $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice que es conservativo si existe en campo escalar $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, C^1$ tal que $F(x) = \nabla f(x)$, $\forall x \in U$. La función f se llama función potencial asociada al campo vectorial F.*

Tenemos entonces que las integrales de linea de un campo conservativo son independientes de la trayectoria y, si se conoce la función potencial, son faciles de calcular

$$\int_\alpha \nabla f = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$$

Teorema 2. *Dado un campo vectorial conservativo F, la matriz Jacobiana de $n \times n$ es simétrica*

Demostración. Como F es conservativo

$$F(x) = (F_1(x), ..., F_n(x)) = \nabla f(x)$$

y como $F_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ para cada $i = 1, ..., n$.
Como

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$$

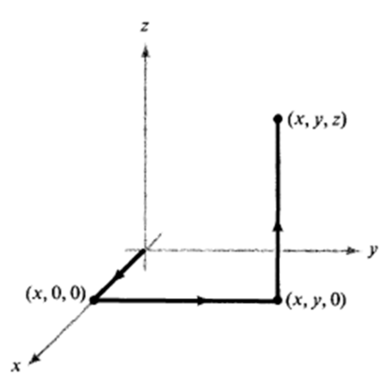
por ser f de clase c^2 entonces la matriz Jacobiana es simétrica □

Teorema 3. Lema de Poincare. *Sea $F = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial suave a trozos cuyo dominio Ω, es una bola abierta o un rectángulo en $\mathbb{R}^3$. Si para cada $i, j = 1., , , .n$ y $x \in \Omega$ se tiene*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$$

entonces F es conservativo

Demostración. Sin perdida de generalidad podemos suponer que Ω esta en el origen. Sea $\mathbf{x} = (x, y, z)$ un punto en Ω y consideremos una trayectoria que une al $(0, 0, 0)$ con (x, y, z)



y definimos

$$f(x,y,z)=\int_0^x F_1(t,0,0)\ dt+\int_0^y F_2(x,t,0)\ dt+\int_0^z F_3(x,y,t)\ dt$$

para esta función f se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^x F_1(t,0,0)\ dt+\int_0^y F_2(x,t,0)\ dt+\int_0^z F_3(x,y,t)\ dt\right)\\
&=F_1(x,0,0)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^y F_2(x,t,0)\ dt\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^z F_3(x,y,t)\ dt\right)\\
&=F_1(x,0,0)+\left(\int_0^y \frac{\partial}{\partial x}F_2(x,t,0)\ dt\right)+\left(\int_0^z \frac{\partial}{\partial x}F_3(x,y,t)\ dt\right)\\
&=F_1(x,0,0)+\left(\int_0^y \frac{\partial}{\partial y}F_1(x,t,0)\ dt\right)+\left(\int_0^z \frac{\partial}{\partial z}F_1(x,y,t)\ dt\right)\\
&=F_1(x,0,0)+F_1(x,y,0)-F_1(x,0,0)+F_1(x,y,z)-F_1(x,y,0)\\
&=F_1(x,y,z)
\end{aligned}$$

la parcial con respecto a y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^x F_1(t,0,0)\ dt+\int_0^y F_2(x,t,0)\ dt+\int_0^z F_3(x,y,t)\ dt\right)\\
&=F_2(x,y,0)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^z F_3(x,y,t)\ dt\right)\\
&=F_2(x,y,0)+\left(\int_0^z \frac{\partial}{\partial y}F_3(x,y,t)\ dt\right)\\
&=F_2(x,y,0)+\left(\int_0^z \frac{\partial}{\partial z}F_2(x,y,t)\ dt\right)\\
&=F_2(x,y,0)+F_2(x,y,z)-F_2(x,y,0)\\
&=F_2(x,y,z)
\end{aligned}$$

finalmente la parcial con respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z}&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_0^x F_1(t,0,0)\ dt+\int_0^y F_2(x,t,0)\ dt+\int_0^z F_3(x,y,t)\ dt\right)\\
&=F_3(x,y,z)
\end{aligned}$$

Como $\nabla f=F$ entonces F es conservativo □

Ejemplo Dado el campo $F(x,y,z)=(y,z\cos(yz)+x,y\cos(yz))$ encontrar una función escalar f tal que $\nabla f=f$

Solución En este caso

$$f(x,y,z) = \int_0^x F_1(t,0,0)\ dt + \int_0^y F_2(x,t,0)\ dt + \int_0^z F_3(x,y,t)\ dt$$

$$= f(x,y,z) = \int_0^x 0\ dt + \int_0^y x\ dt + \int_0^z y\cos(yt)\ dt$$

$$= xy + \operatorname{sen}(yz)$$

La función f se denomina función potencial de F.