Divergencia de un Campo Vectorial en el Espacio ($\mathbb{R}^3$)

Dado un campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 dado por $F = (P, Q, R)$ y un punto en el espacio $P = (x_0, y_0, z_0)$ contenido en el dominio del campo F. Se define una superficie cerrada S alrededor del punto $P = (x_0, y_0, z_0)$

La divergencia del campo vectorial en el punto P puede definirse como

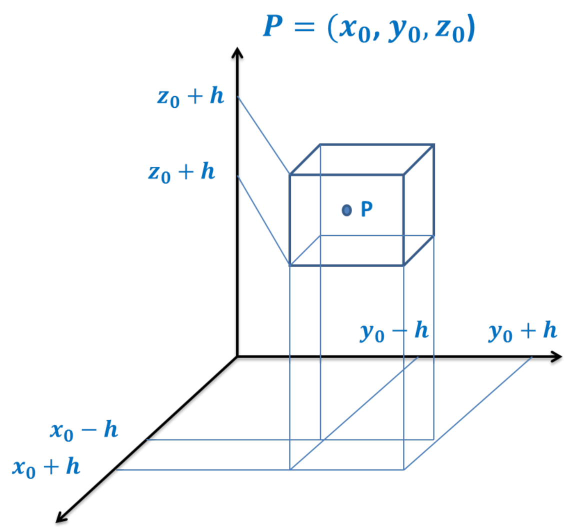
$$div\ F(x_0, y_0, z_0) = \lim_{vol\ (S)\to 0} \frac{\int_{Fr(S)} F}{vol\ (S)}$$

Ejercicio Comprobar que

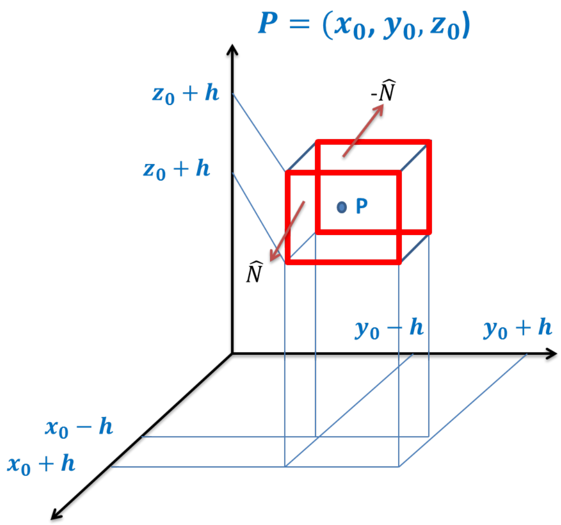
$$div\ F(x_0, y_0, z_0) = \lim_{vol\ (S)\to 0} \frac{\int_{Fr(S)} F}{vol\ (S)}$$

para la superficie

$$S = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - h, y_0 + h] \times [z_0 - h, z_0 + h]$$



Solución En este caso La definición de gradiente, aplicada a un volumen como el de la figura, genera seis integrales de superficie, una por cada cara del paralelepípedo.



Cara Frontal

Una parametrización de la superficie que representa la cara frontal sería

$$[x_0 + h, y_0 + t, z_0 + t], \quad t \in [-h, h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([x_0+h, y_0+t, z_0+t])} F([x_0+h, y_0+t, z_0+h]) \cdot (1,0,0)\, \overrightarrow{dS_x} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor\\ madio\ integrales}} P(x_0+h, y_0+\epsilon_y, z_0+\epsilon_z) \cdot 4h^2$$

Cara Posterior

Una parametrización de la superficie que representa la cara posterior sería

$$[x_0 - h, y_0 + t, z_0 + h], \quad t \in [-h, h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([x_0-h, y_0+t, z_0+t])} F([x_0-h, y_0+t, z_0+h]) \cdot (-1,0,0)\, \overrightarrow{dS_x} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor\\ madio\ integrales}} -P(x_0-h, y_0+\epsilon_y, z_0+\epsilon_z) \cdot 4h^2$$

Por lo tanto

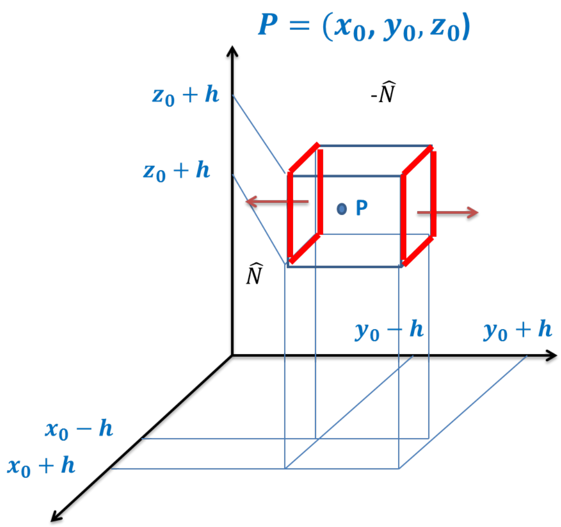
$$\int_{S_x} \varphi\, \overrightarrow{dS_x} = P(x_0 + h, y_0 + \epsilon_y, z_0 + \epsilon_z) \cdot 4h^2 - P(x_0 - h, y_0 + \epsilon_y, z_0 + \epsilon_z) \cdot 4h^2$$

el signo del segundo término se debe a la orientación de la superficie que representa la cara posterior cuyo vector normal apunta hacia el vector $(-1, 0, 0)$

$$\underbrace{=}_{\substack{Teorema\ del\ valor\\ medio\ derivadas}} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0 + \epsilon, y_0 + \epsilon_y, z_0 + \epsilon_z) \cdot 8h^3$$

Por lo tanto
$$\int_{S_x} F\ \overrightarrow{dS_x} = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0+\epsilon, y_0+\epsilon_y, z_0+\epsilon_z)\cdot 8h^3$$

Ahora procedemos con las caras laterales cuyo vector normal es paralelo al eje Y



Cara Lateral Derecha

Una parametrización de la superficie que representa la cara lateral derecha sería

$$[x_0+t, y_0+h, z_0+t], \quad t\in[-h,h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([x_0+t, y_0+h, z_0+t])} F([x_0+t, y_0+h, z_0+t])\cdot(0,1,0)\ \overrightarrow{dS_y} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor\\ madio\ integrales}} Q(x_0+\epsilon_u, y_0+h, z_0+\epsilon_v)\cdot 4h^2$$

Lateral Izquierda

Una parametrización de la superficie que representa la cara lateral izquierda sería

$$[x_0+t, y_0-h, z_0+t], \quad t\in[-h,h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([x_0+t, y_0-h, z_0+t])} F([x_0+t, y_0-h, z_0+t])\cdot(0,-1,0)\ \overrightarrow{dS_y} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor\\ madio\ integrales}} Q(x_0+\epsilon_u, y_0-h, z_0+\epsilon_v)\cdot 4h^2$$

Por lo tanto

$$\int_{S_y} F\ \overrightarrow{dS_x} = Q(x_0+\epsilon_u, y_0+h, z_0+\epsilon_v)\cdot 4h^2 - Q(x_0-\epsilon_u, y_0-h, z_0+\epsilon_v)\cdot 4h^2$$

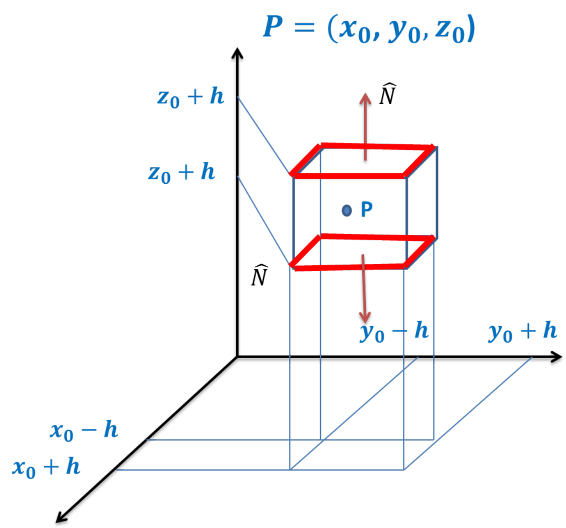
el signo del segundo término se debe a la orientación de la superficie que representa la cara posterior cuyo vector normal apunta hacia el vector $(0,-1,0)$

$$\underbrace{=}_{\substack{Teorema\ del\ valor\\ medio\ derivadas}} \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0+\epsilon_u, y_0+\epsilon_y, z_0+\epsilon_v)\cdot 8h^3$$

Por lo tanto

$$\int_{S_y} F\ \overrightarrow{dS_y} = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0+\epsilon_u, y_0+\epsilon_y, z_0+\epsilon_z)\cdot 8h^3$$

Ahora procedemos con las caras inferior y superior cuyo vector normal es paralelo al eje Z



Cara Superior

Una parametrización de la superficie que representa la cara superior sería

$$[x_0+t, y_0+t, z_0+h], \quad t\in[-h,h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([x_0+t,y_0+t,z_0+h])} F([x_0+t, y_0+t, z_0+h])\cdot(0,0,1)\ \overrightarrow{dS_z} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor\\ madio\ integrales}} R(x_0+\epsilon_u, y_0+\epsilon_v, z_0+h)\cdot 4h^2$$

Cara Inferior

Una parametrización de la superficie que representa la cara inferior sería

$$[x_0+t, y_0+t, z_0+h], \quad t\in[-h,h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([x_0+t,y_0+t,z_0-h])} F([x_0+t, y_0+t, z_0-h])\cdot(0,0,-1)\,\overrightarrow{dS_z} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor\\ madio\ integrales}} R(x_0+\epsilon_u, y_0+\epsilon_v, z_0-h)\cdot 4h^2$$

Por lo tanto

$$\int_{S_z}\varphi\,\overrightarrow{dS_z} = R(x_0+\epsilon_u, y_0+\epsilon_v, z_0+h)\cdot 4h^2 - R(x_0-\epsilon_u, y_0+\epsilon_v, z_0-h)\cdot 4h^2$$

el signo del segundo término se debe a la orientación de la superficie que representa la cara posterior cuyo vector normal apunta hacia el vector $(0,0,-1)$

$$\underbrace{=}_{\substack{Teorema\ del\ valor\\ medio\ derivadas}} \frac{\partial R}{\partial z}(x_0+\epsilon_u, y_0+\epsilon_v, z_0+\epsilon_z)\cdot 8h^3$$

Por lo tanto

$$\int_{S_z} F\,\overrightarrow{dS_z} = \frac{\partial R}{\partial z}(x_0+\epsilon_u, y_0+\epsilon_v, z_0+\epsilon_z)\cdot 8h^3$$

Tenemos entonces que

$$\int_{Fr(S)} F\cdot\overrightarrow{dS} = \int_{S_x}\varphi\,\overrightarrow{dS_x} + \int_{S_y}\varphi\,\overrightarrow{dS_y} + \int_{S_z}\varphi\,\overrightarrow{dS_z}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x}(x_0+\epsilon, y_0+\epsilon_y, z_0+\epsilon_z)\cdot 8h^3 + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0+\epsilon_u, y_0+\epsilon_y, z_0+\epsilon_z)\cdot 8h^3 + \frac{\partial R}{\partial z}(x_0+\epsilon_u, y_0+\epsilon_v, z_0+\epsilon_z)\cdot 8h^3$$

$$= 8h^3\left(\frac{\partial P}{\partial x}(x_0+\epsilon, y_0+\epsilon_y, z_0+\epsilon_z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0+\epsilon_u, y_0+\epsilon_y, z_0+\epsilon_z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x_0+\epsilon_u, y_0+\epsilon_v, z_0+\epsilon_z)\right)$$

Por lo tanto

$$\lim_{vol\ (S)\to 0}\frac{\int_{Fr(S)} F\,\overrightarrow{ds}}{vol\ (S)} = \lim_{vol\ (S)\to 0}\frac{1}{vol\ (s)}\left(\int_{S_x} P\,\overrightarrow{dS_x} + \int_{S_y} Q\,\overrightarrow{dS_y} + \int_{S_z} R\,\overrightarrow{dS_z}\right)$$

$$= \lim_{vol\ (S)\to 0}\frac{1}{8h^3}\cdot 8h^3\left(\frac{\partial P}{\partial x}(x_0+\epsilon, y_0+\epsilon_y, z_0+\epsilon_z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0+\epsilon_u, y_0+\epsilon_y, z_0+\epsilon_z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x_0+\epsilon_u, y_0+\epsilon_v, z_0+\epsilon_z)\right)$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial R}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)$$

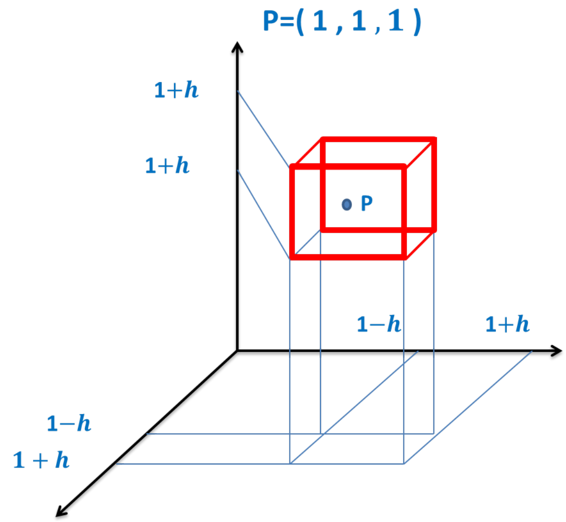
$$= div\ F(x_0,y_0,z_0)$$

$$= \nabla\cdot F(x_0,y_0,z_0)$$

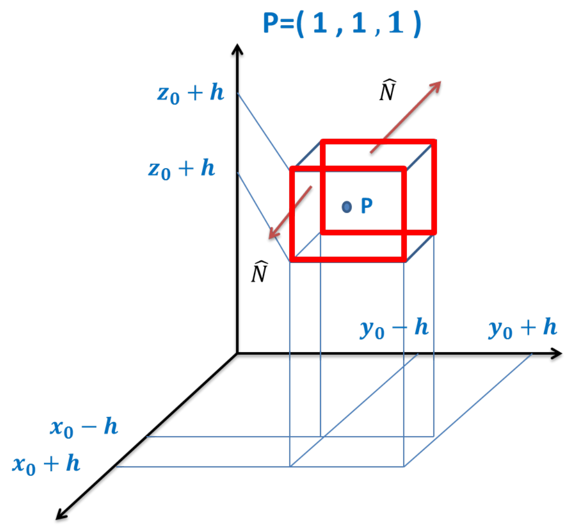
Ejemplo Calcular $\nabla \cdot F(1,1,1)$ donde $F(x,y,z) = (x,y,z)$

Solución En este caso consideremos la superficie

$$S = [1-h, 1+h] \times [1-h, 1+h] \times [1-h, 1+h]$$



Solución En este caso La definición de divergencia, aplicada a un volumen como el de la figura, genera seis integrales de superficie, una por cada cara del paralelepípedo. Vamos a trabajar las caras cuyo vector normal es paralelo al eje X



Cara Frontal

Una parametrización de la superficie que representa la cara frontal sería

$$[1+h, 1+t, 1+t], \quad t \in [-h, h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([1+h,1+t,1+t])} F([1+h, 1+t, 1+h]) \cdot (1,0,0)\ \overrightarrow{dS_x} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor \\ madio\ integrales}} P(1+h, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z) \cdot 4h^2$$

Cara Posterior

Una parametrización de la superficie que representa la cara posterior sería

$$[1-h, 1+t, 1+h], \quad t \in [-h, h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([1-h,1+t,1+t])} F([1-h, 1+t, 1+h]) \cdot (-1,0,0)\ \overrightarrow{dS_x} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor \\ madio\ integrales}} P(1-h, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z) \cdot 4h^2$$

Por lo tanto

$$\int_{S_x} F\ \overrightarrow{dS_x} = P(1+h, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z) \cdot 4h^2 - P(1-h, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z) \cdot 4h^2$$

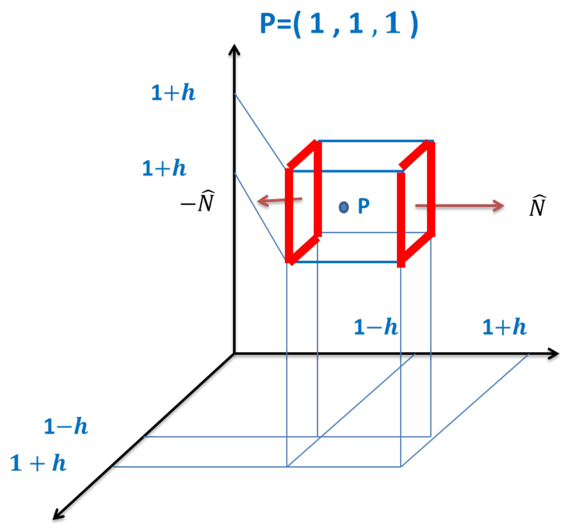
el signo del segundo término se debe a la orientación de la superficie que representa la cara posterior cuyo vector normal apunta hacia el vector $(-1, 0, 0)$

$$\underbrace{=}_{\substack{Teorema\ del\ valor \\ medio\ derivadas}} \frac{\partial P}{\partial x}(1+\epsilon, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z) \cdot 8h^3$$

Por lo tanto

$$\int_{S_x} F\ \overrightarrow{dS_x} = \frac{\partial P}{\partial x}(1+\epsilon, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z) \cdot 8h^3$$

Ahora procedemos con las caras laterales cuyo vector normal es paralelo al eje Y



Cara Lateral Derecha

Una parametrización de la superficie que representa la cara lateral derecha sería

$$[1+t, 1+h, 1+t], \quad t \in [-h, h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([1+t,1+h,1+t])} F([1+t, 1+h, 1+t]) \cdot (0, 1, 0)\, \overrightarrow{dS_y} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor \\ madio\ integrales}} Q(1+\epsilon_u, 1+h, 1+\epsilon_v) \cdot 4h^2$$

Cara Lateral Izquierda

Una parametrización de la superficie que representa la cara lateral izquierda sería

$$[1+t, 1-h, 1+t], \quad t \in [-h, h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([1+t,1-h,1+t])} F([1+t, 1-h, 1+t]) \cdot (0, -1, 0)\, \overrightarrow{dS_y} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor \\ madio\ integrales}} Q(1+\epsilon_u, 1-h, 1+\epsilon_v) \cdot 4h^2$$

Por lo tanto

$$\int_{S_y} \varphi\, \overrightarrow{dS_y} = Q(1+\epsilon_u, 1+h, 1+\epsilon_v) \cdot 4h^2 - Q(1-\epsilon_u, 1-h, 1+\epsilon_v) \cdot 4h^2$$

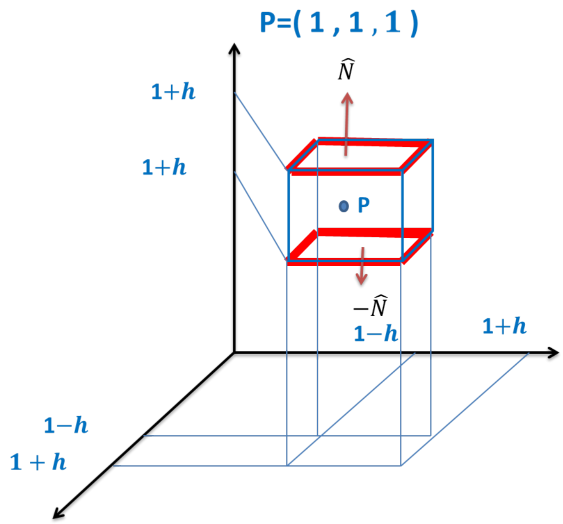
el signo del segundo término se debe a la orientación de la superficie que representa la cara posterior cuyo vector normal apunta hacia el vector $(0, -1, 0)$

$$\underbrace{=}_{\substack{Teorema\ del\ valor \\ medio\ derivadas}} \frac{\partial Q}{\partial y}(1+\epsilon_u, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_v) \cdot 8h^3$$

Por lo tanto

$$\int_{S_y} \varphi \; \overrightarrow{dS_y} = \frac{\partial Q}{\partial y}(1+\epsilon_u, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z)\cdot 8h^3$$

Ahora procedemos con las caras laterales cuyo vector normal es paralelo al eje Z



Cara Superior

Una parametrización de la superficie que representa la cara superior sería

$$[1+t, 1+t, 1+h], \quad t \in [-h, h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([1+t,1+t,1+h])} F([1+t,1+t,1+h])\cdot(0,0,1)\;\overrightarrow{dS_z} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor\\ madio\ integrales}} R(1+\epsilon_u, 1+\epsilon_v, 1+h)\cdot 4h^2$$

Cara Inferior

Una parametrización de la superficie que representa la cara inferior sería

$$[1+t, 1+t, 1+h], \quad t \in [-h, h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([1+t,1+t,1-h])} R([1+t,1+t,1-h])\cdot(0,0,-1)\;\overrightarrow{dS_z} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor\\ madio\ integrales}} R(1+\epsilon_u, 1+\epsilon_v, 1-h)\cdot 4h^2$$

Por lo tanto

$$\int_{S_z} \varphi \ \overrightarrow{dS_z} = R(1+\epsilon_u, 1+\epsilon_v, 1+h)\cdot 4h^2 - R(1-\epsilon_u, 1+\epsilon_v, 1-h)\cdot 4h^2$$

el signo del segundo término se debe a la orientación de la superficie que representa la cara posterior cuyo vector normal apunta hacia el vector $(0,0,-1)$

$$\underbrace{=}_{\substack{Teorema\ del\ valor\\ medio\ derivadas}} \frac{\partial R}{\partial z}(1+\epsilon_u, 1+\epsilon_v, 1+\epsilon_z)\cdot 8h^3$$

Por lo tanto

$$\int_{S_z} \varphi \ \overrightarrow{dS_z} = \frac{\partial R}{\partial z}(1+\epsilon_u, 1+\epsilon_v, 1+\epsilon_z)\cdot 8h^3$$

Tenemos entonces que

$$\int_{Fr(S)} F\cdot \overrightarrow{dS} = \left(\int_{S_x} F\ \overrightarrow{dS_x}, \int_{S_y} F\ \overrightarrow{dS_y}, \int_{S_z} F\ \overrightarrow{dS_z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x}(1+\epsilon, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z)\cdot 8h^3 + \frac{\partial Q}{\partial y}(1+\epsilon_u, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z)\cdot 8h^3 + \frac{\partial R}{\partial z}(1+\epsilon_u, 1+\epsilon_v, 1+\epsilon_z)\cdot 8h^3\right)$$

$$= 8h^3\left(\frac{\partial P}{\partial x}(1+\epsilon, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(1+\epsilon_u, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z) + \frac{\partial R}{\partial z}(1+\epsilon_u, 1+\epsilon_v, 1+\epsilon_z)\right)$$

Por lo tanto

$$\lim_{vol\ (S)\to 0} \frac{\int_{Fr(S)} \varphi\ \overrightarrow{ds}}{vol\ (S)} = \lim_{vol\ (S)\to 0} \frac{1}{vol\ (s)}\left(\int_{S_x} F\ \overrightarrow{dS_x} + \int_{S_y} F\ \overrightarrow{dS_y} + \int_{S_z} F\ \overrightarrow{dS_z}\right)$$

$$= \lim_{vol\ (S)\to 0} \frac{1}{8h^3}\cdot 8h^3\left(\frac{\partial P}{\partial x}(1+\epsilon, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(1+\epsilon_u, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z) + \frac{\partial R}{\partial z}(1+\epsilon_u, 1+\epsilon_v, 1+\epsilon_z)\right)$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,1,1) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,1,1) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(1,1,1)\right)$$

$$= 1+1+1 = 3$$

$$= div\ F(1,1,1)$$

$$= \nabla\varphi(1,1,1)$$

$$= 3$$