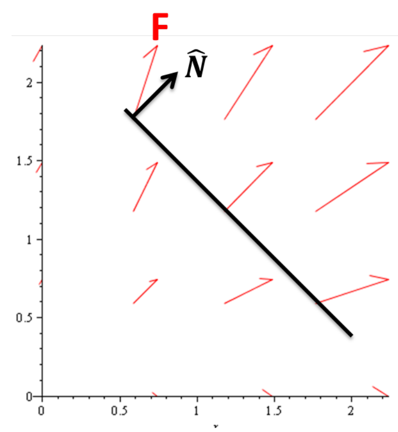
Divergencia de un Campo Vectorial en el Plano ($\mathbb{R}^2$)

Dado un campo vectorial $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, se tiene que F representa el campo de velocidades de un fluido en un cierto instante; es decir, si $(x_0, y_0) \in D$ es un punto por el cual pasa un fluido, entonces $F(x_0, y_0)$ representará la velocidad con la que viaja el fluido en ese punto.
Ahora bien, si consideramos un segmento de recta por donde pasa el fluido y elegimos un vector $\hat{N}$ que apunte en una dirección normal al segmento de recta

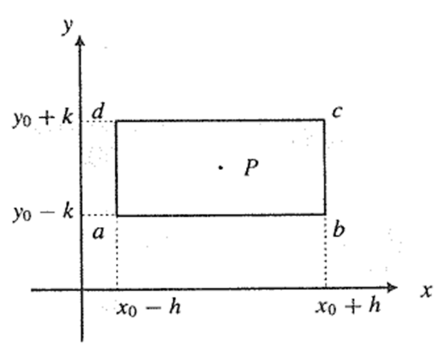


Decimos que el número

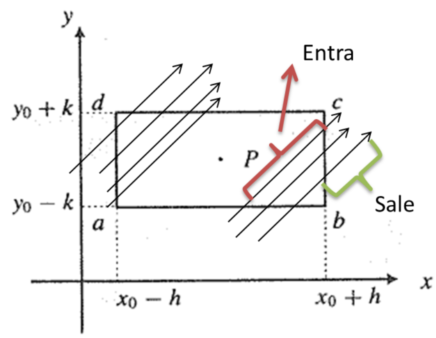
$$\left(F \cdot \hat{N}\right) \cdot \ell(L) \ (Longitud\ del\ segmento)$$

nos da la medida (en términos de un área) de que tanto se expande el fluido a través de L en una unidad de tiempo, y que esta expansión es en la dirección en la que apunta $\hat{N}$.
Supongamos que el campo $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $F = (M, N)$ definido en D de $\mathbb{R}^2$ es el campo de velocidades de una corriente de un fluido. Estamos interesados en estimar cuánto fluido pasa por una "pequeña"porción de D. Sea $p = (x_0 . y_0) \in \ D$ y consideremos el rectángulo R con centro en p dado por

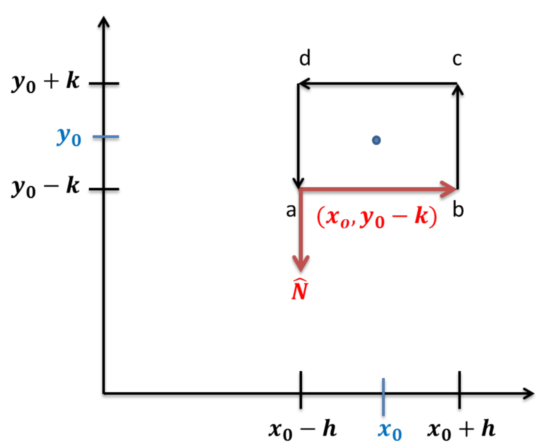
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 - h \leq x \leq x_0 + h,\ y_0 - k \leq y \leq y_0 + k\}$$



Tomando a h y a k suficientemente pequeños podemos asegurar que $R \subset D$.
Una estimación de cuanto fluido pasa a través del rectángulo R la podemos obtener sumando lo que pasa por los lados ab y ad, y los lados cd y bc.



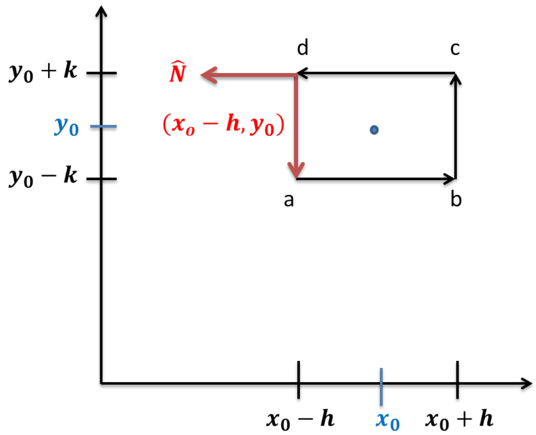
Hagamos el cálculo de la cantidad de fluido que pasa por el lado ab
Lo que entra al lado ab



En este caso para el lado ab se tiene

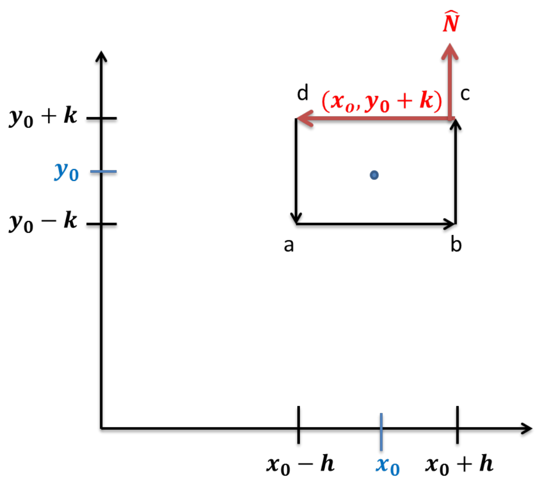
$$F(x_0, y_0 - k) \cdot (-\hat{j})\ 2\ h\ = (M(x_0, y_0 - k), N(x_0, y_0 - k)) \cdot (0, -1)\ 2\ h = -2hN(x_0, y_0 - k)$$

analogamentre para lado ad se tiene



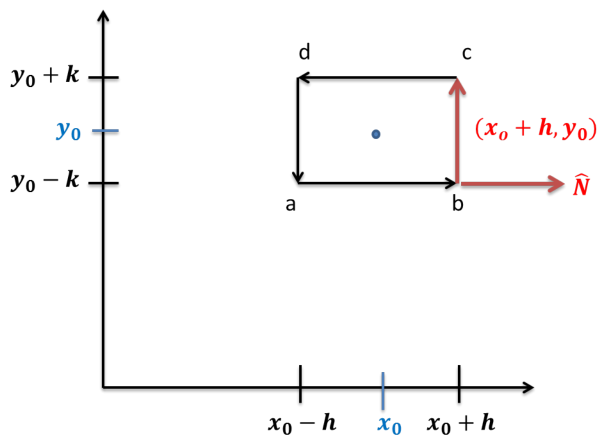
$$F(x_0 - h, y_0) \cdot (-\hat{i})2k = -2kM(x_0 - h, y_0)$$

Para el lado dc se tiene



$$F(x_0, y_0 + k) \cdot (\hat{j})2h = 2hN(x_0, y_0 + k)$$

Para lado cb



$$F(x_0+h,y_0)\cdot(\hat{\imath})2k = 2kM(x_0+h,y_0)$$

Entonces la cantidad de fluido que pasa a través del rectángulo R es aproximadamente

$$-2hN(x_0,y_0-k) - 2kM(x_0-h,y_0) + 2hN(x_0,y_0+k) + 2kM(x_0+h,y_0) =$$

$$2kM(x_0+h,y_0) - 2kM(x_0-h,y_0) + 2hN(x_0,y_0+k) - 2hN(x_0,y_0-k) =$$

$$2k(M(x_0+h,y_0) - M(x_0-h,y_0)) + 2h(N(x_0,y_0+k) - N(x_0,y_0-k))$$

El cociente

$$\frac{\left(F\cdot\hat{N}\right)\cdot\ell(L)}{\acute{area}\ de\ R}$$

se puede interpretar como la expansión promedio producida por F a través de R.
Por lo tanto Dividiendo

$$2k(M(x_0+h,y_0) - M(x_0-h,y_0)) + 2h(N(x_0,y_0+k) - N(x_0,y_0-k))$$

entre el área encerrada por el rectángulo R (igual a 4 hk), obtenemos una medida de la cantidad de fluido que pasa por R por unidad de área. Ésta es entonces

$$\frac{M(x_0+h,y_0) - M(x_0-h,y_0)}{2h} + \frac{N(x_0,y_0+k) - N(x_0,y_0-k)}{2k}$$

haciendo que h, k tiendan a cero, obtenemos información sobre cuánto fluido pasa por el punto p por unidad de área

$$\lim_{h,k\to 0}\left(\frac{M(x_0+h,y_0) - M(x_0-h,y_0)}{2h} + \frac{N(x_0,y_0+k) - N(x_0,y_0-k)}{2k}\right) =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{M(x_0+h,y_0) - M(x_0-h,y_0)}{2h} + \lim_{k\to 0}\frac{N(x_0,y_0+k) - N(x_0,y_0-k)}{2k} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{h\to 0}\frac{M(x_0+h,y_0)-M(x_0-h,y_0)}{h}\right)+\frac{1}{2}\left(\lim_{k\to 0}\frac{N(x_0,y_0+k)-N(x_0,y_0-k)}{2k}\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(\lim_{h\to 0}\frac{M(x_0+h,y_0)-M(x_0,y_0)+M(x_0,y_0)-M(x_0-h,y_0)}{h}\right)+$$
$$\frac{1}{2}\left(\lim_{k\to 0}\frac{N(x_0,y_0+k)-N(x_0,y_0)+N(x_0,y_0)-N(x_0,y_0-k)}{2k}\right)=$$
$$\frac{\partial M}{\partial x}(p)+\frac{\partial N}{\partial x}(p)$$

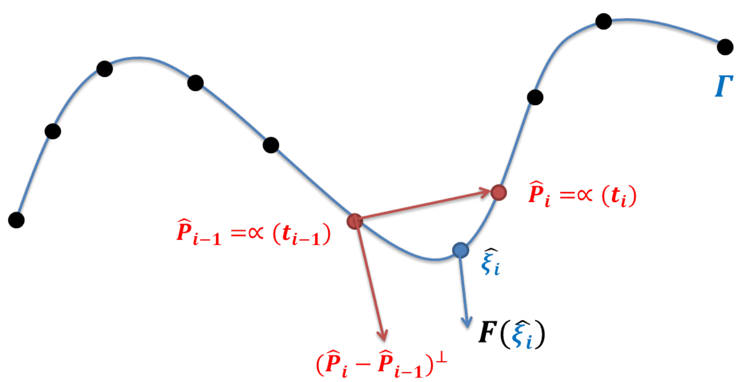
Supongamos que el campo $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $F = (M, N)$ definido en D de $\mathbb{R}^2$ es el campo de velocidades de una corriente de un fluido, y sea $\Gamma \subset D$ una curva suave. Necesitamos encontrar una forma de medir que tanto se expandira el fluido a través de Γ.
Para esto consideramos una partición

$$\hat{P}_0, \hat{P}_1, \ldots, \hat{P}_k \in \Gamma$$

si denotamos

$$\left(\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}\right)^{\perp}$$

al vector que se obtiene de girar noventa grados en la dirección horaria al vector $\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}$



el número $F(\xi_i) \cdot (\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^{\perp}$ con $\xi_i \in \widehat{\hat{P}_{i-1}\hat{P}_i}$ es una aproximación a la expansión del fluido a través del subarco Γ_i en la dirección $(\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^{\perp}$, de manera que

$$\sum_{i=1}^{k} F(\xi_i) \cdot (\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^{\perp}$$

será una aproximación a la expansión del fluido a través de toda la curva Γ en la dirección determinada por $(\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^{\perp}$.
Si $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ parametriza Γ y $P = \{t_0, \ldots, t_k\}$ es una partición de $[a, b]$ entonces la expresión se puede escribir

$$\sum_{i=1}^{k} F(\alpha(\xi_i)) \cdot (\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))^{\perp}$$

donde $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ es tal que $\alpha(\xi_i) = \hat{\xi}_i$
Tenemos entonces que

$$\sum_{i=1}^{k} F(\alpha(\xi_i)) \cdot (\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))^{\perp} = \sum_{i=1}^{k} F(\alpha(\xi_i)) \cdot (\alpha'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}))^{\perp}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} F(\alpha(\xi_i)) \cdot (\alpha'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}))^{\perp}(t_i - t_{i-1}))$$

Tomando una partición suficientemente grande

$$\sum_{i=1}^{k} F(\alpha(\xi_i)) \cdot (\alpha'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}))^{\perp}(t_i - t_{i-1})) \to \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot (\alpha'(t))^{\perp} \; dt$$

donde $(\alpha'(t))^{\perp} = (x'(t), y'(t))^{\perp} = (y'(t), -x'(t))$
ahora bien, si $F = (M, N)$ y $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ entonces

$$\int_a^b F(\alpha(t)) \cdot (\alpha'(t))^{\perp} \; dt = \int_a^b F(x(t), y(t)) \cdot (y'(t), -x'(t)) \; dt$$

$$= \int_a^b (M(x(t), y(t)), N(x(t), y(t))) \cdot (y'(t), -x'(t)) \; dt$$

$$= \int_a^b M(x(t), y(t))(y'(t)) - N(x(t), y(t))(x'(t)) \; dt$$

$$\int_a^b \left(M(x(t), y(t))\frac{dy}{dt} - N(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} \right) \; dt$$

$$= \int_a^b M \; dy - N \; dx = \int_a^b -N \; dx + M \; dy$$

$$= \int_a^b -N \; dx + M \; dy$$

aplicando el Teorema de Green

$$= \int \int_D \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial - N}{\partial y} \; dx \; dy$$

$$= \int \int_D \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \; dx \; dy$$

aplicando el teorema del valor medio

$$= \left(\frac{\partial M}{\partial x}(\hat{\xi}_i) + \frac{\partial N}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right) \cdot m(D)$$

por lo tanto

$$\int_a^b F(\alpha(t)) \cdot (\alpha'(t))^{\perp} \; dt = \left(\frac{\partial M}{\partial x}(\hat{\xi}_i) + \frac{\partial N}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right) \cdot m(D)$$

$$\Rightarrow \frac{\int_a^b F(\alpha(t)) \cdot (\alpha'(t))^{\perp} \, dt}{m(D)} = \frac{\partial M}{\partial x}(\hat{\xi}_i) + \frac{\partial N}{\partial y}(\hat{\xi}_i)$$

de manera que

$$\begin{aligned}\lim_{m(D)\to 0} \frac{\int_a^b F(\alpha(t)) \cdot (\alpha'(t))^{\perp} \, dt}{m(D)} &= \lim_{m(D)\to 0} \frac{\partial M}{\partial x}(\hat{\xi}_i) + \frac{\partial N}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \\ &= \frac{\partial M}{\partial x}(\hat{x}) + \frac{\partial N}{\partial y}(\hat{x})\end{aligned}$$

Definición 1. *Sea $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por $F = (M, N)$ y $(x_0, y_0) \in D$ tal que $\frac{\partial M}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial N}{\partial y}(x_0, y_0)$ existen para todo $(x_0, y_0) \in D$. Definimos la divergencia de F en $(x_0, y_0) \in D$, que denotamos por $div\ F((x_0, y_0))$, como*

$$div\ F((x_0, y_0)) = \frac{\partial M}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial N}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Teorema de la Divergencia en el Plano

Teorema 1. *Teorema de la divergencia en el plano*
Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región cuya frontera esta positivamente orientada y que se puede ver como la imagen de la curva de clase C^1 $\alpha : [a, b] \to\to \mathbb{R}^2$. Sea $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 definido en D. Si $\hat{N}(t)$ es el vector normal unitario exterior a D, se tiene

$$\int_{Fr(D)} F \cdot N = \int\int_D div\ F\ dx\ dy$$

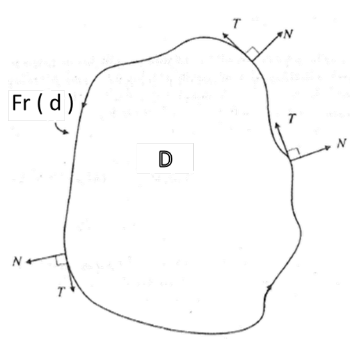
Demostración. Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva cerrada en $\mathbb{R}^2$ tal que $Fr(D) = \alpha(t)$ dada por

$$\alpha(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$$

$$\therefore \alpha'(t) = x'(t)\hat{\imath} + y'(t)\hat{\jmath}$$

Y el vector normal se puede escribir como

$$y'(t)\hat{\imath} - x'(t)\hat{\jmath} = N(t)$$



Entonces dado el campo $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ como $F(x,y)=M\hat{\imath}+N\hat{\jmath}$ se tiene

$$\int_{Fr(D)} F\cdot N=\int_a^b F(\alpha(t))\cdot N(t)\,dt=\int_a^b F(x(t),y(t))\cdot(y'(t),-x'(t))dt=\int_a^b M(x(t),y(t))(y'(t))-N(x(t),y(t))(x'(t))\,dt$$

$$\int_a^b\left(M(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}-N(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}\right)\,dt=\int_a^b M\;dy-N\;dx=\int_a^b -N\;dx+M\;dy=$$

aplicando el teorema de Green

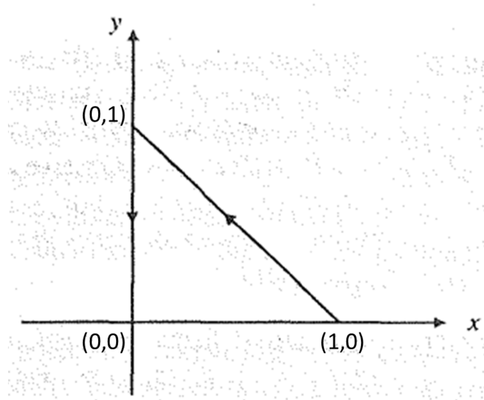
$$=\int\int_D\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\left(-\frac{\partial N}{\partial y}\right)\right)dxdy=\int\int_D\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)dxdy=\int\int_D div\;F\;dxdy$$

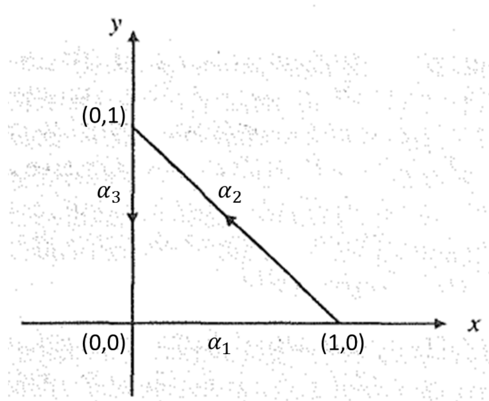
$\square$

La generalización de esta forma a tres dimensiones se llama Teorema de la divergencia (Gauss).

Ejemplo Verificaremos el teorema de la divergencia con el campo $F(x,y)=(-x,-y)$ y sea

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x+y\leq 1,\;y\geq 0\;x\geq 0\}$$





una parametrización de la frontera sería

$$\alpha_1:[0,1]\to\mathbb{R}^2\;\;dada\;\;por\;\;\alpha_1(t)=(t,0)$$

$$\alpha_2:[0,1]\to\mathbb{R}^2\;\;dada\;\;por\;\;\alpha_1(t)=(1-t,t)$$

$$\alpha_1:[0,1]\to\mathbb{R}^2\;\;dada\;\;por\;\;\alpha_1(t)=(0,1-t)$$

por lo tanto

$$\int_\alpha F=\int_{\alpha_1}F+\int_{\alpha_2}F+\int_{\alpha_3}F$$

en este caso se tiene que

$$\int_{\alpha_1} F = \int_0^1 F(t,0)\cdot(0,-1)\ dt = \int_0^1 (-t,0)\cdot(0,-1)\ dt = 0$$

$$\int_{\alpha_2} F = \int_0^1 F(1-t,t)\cdot(1,1)\ dt = \int_0^1 F(t-1,-t)\cdot(1,-1)\ dt = \int_0^1 -1\ dt = -1$$

$$\int_{\alpha_3} F = \int_0^1 F(0,1-t)\cdot(-1,0)\ dt = \int_0^1 (0,t-1)\cdot(-1,0)\ dt = 0$$

por lo tanto el flujo a través de D será

$$\int_{Fr(D)} F = \int_{\alpha_1} F + \int_{\alpha_2} F + \int_{\alpha_3} F = -1$$

El signo $(-)$ significa que el flujo es hacia el interior de D
Por otro lado

$$div\ F = \ div\ (-x,-y) = \frac{\partial(-x)}{\partial x} + \frac{\partial(-y)}{\partial y} = -2$$

entonces

$$\int\int_D div\ F\ dxdx = \int\int_D -2\ dxdy = -2\int\int_D dxdy = -1$$