Función delta de Dirac

Considere la función $S : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida como

$$S(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

esta función se le conoce como Heaviside
Podemos ecribir entonces

$$S(x - x_0) = \begin{cases} 0 & si \quad x < x_0 \\ 1 & si \quad x > x_0 \end{cases}$$

Podemos decir que

$$\frac{d(S(x - x_0))}{dx} = \begin{cases} 0 & si \quad x \neq x_0 \\ \infty & si \quad x = x_0 \end{cases}$$

se deonta como

$$\delta(x - x_0) = \frac{d(S(x - x_0))}{dx} = \begin{cases} 0 & si \quad x \neq x_0 \\ \infty & si \quad x = x_0 \end{cases}$$

La función $\delta(x - x_0)$ se le conoce como la función **Delta de Dirac**
Si

$$\delta(x - x_0) = \frac{d(S(x - x_0))}{dx}$$

al integrar ambos lados en $(-\infty, x)$

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x' - x_0)\ dx' = S(x - x_0)$$

si $x_0 \in (-\infty, x)$ entonces $x_0 < x$ y por tanto $x - x_0 > 0$ de esta manera

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x' - x_0)\ dx' = 1$$

para x suficientemente grande

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x' - x_0)\ dx' = 1$$

Definición 1. *La función* ***Delta de Dirac*** *satisface*

$$i) \quad \delta(x - y) = 0 \quad para \quad x \neq y$$

$$ii) \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(x - y)\ dx = 1 \quad para \quad x \neq y$$

consideremos la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(x - x_0)\ dx$$

con $f(x)$ continua, acotada alrededor de x_0
Como $\delta(x-y)=0$ para $x\neq y$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(x-x_0)\ dx = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} f(x)\ \delta(x-x_0)\ dx \quad \epsilon>0$$

en este caso si ϵ es suficientemente pequeño los valores de $f(x)$ en el intervalo de integración son aproximadamente igual a una constante $f(x_0)$. Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(x-x_0)\ dx$$

con $f(x)$ bien comportada (continua y acotada) en los alrededores de x_0,
Si $\delta(x-x_0)=0$ si $x\neq x_0$ podemos cambier los limites de integración y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(x-x_0)\ dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\ \delta(x-x_0)\ dx$$

donde $\epsilon>0$ es un estero positivo arbitrario.
Si tomamos ϵ suficientemente pequeño $f(x)\to f(x_0)$ y entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(x-x_0)\ dx = f(x_0)\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \delta(x-x_0)\ dx = f(x_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\ dx = f(x_0)$$

Por lo tanto para cualquier función continua $f(x)$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\ \delta(x-x_0)\ dx = f(x_0)$$

Ejemplo Tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(2x)\ \delta(x-4)\ dx = \operatorname{sen}(8x)$$

Mediante un proceso analogo se puede demostrar que

$$1) \quad \int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\ dx = \begin{cases} f(x_0) & si \quad x_0\in[a,b] \\ 0 & si \quad x_0\notin[a,b] \end{cases}$$

$$2) \quad \int_c^d f(x,y)\delta(y-y_0)\ dy = \begin{cases} f(x,y_0) & si \quad y_0\in[c,d] \\ 0 & si \quad y_0\notin[c,d] \end{cases}$$

$$3) \quad \int_{Region\ yz} f(x,y,z)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\ dA = \begin{cases} f(x,y_0,z_0) & si \quad (y_0,z_0)\in\ Region\ yz \\ 0 & si \quad (y_0,z_0)\notin\ Region\ yz \end{cases}$$

Ejemplo Tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (5x^2y^3+4)\ \delta(x-2)\ \delta(y-3)\ dx\ dy = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(5x^2y^3+4)\ \delta(x-2)\ dx\right)\ \delta(y-3)\ dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(20y^3+4)\ \delta(y-3)\ dy = 544$$

Ejemplo Tenemos que

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \delta(r-a)\ \delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\ \delta(\phi-\pi)\ r^2\,\mathrm{sen}(\theta)\ d\phi\ d\theta\ dr =$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi} \delta(\phi-\pi)\ d\phi\right) r^2\,\mathrm{sen}(\theta)\,\delta(r-a)\,\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\ d\theta\ dr = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(\theta)\ \delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\ d\theta\right) r^2\ \delta(r-a)\ dr =$$

$$\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(\theta)\ \delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\ d\theta\right)\ r^2\ \delta(r-a)\ dr = \int_0^{\infty}\ r^2\ \delta(r-a)\ dr = a^2$$

Función de Green

Definición 2. *Vamos a usar la delta de Dirac para definir una función G(x,y) que satisface*

$$1)\quad G(x,y) = G(y,x)$$

$$2)\quad \nabla^2 G(x,y) = \delta(x-y)$$

esta función se llama ***Función de Green***

Ejemplo Suponga que $G(x,y)$ satisface $\nabla^2 u = \rho$ con ρ reemplazado por $\delta(x-y)$ entonces

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} G(x,y)\ \rho(y)\ dy$$

es una solución de $\nabla^2 u = \rho$

Solución Tenemos que

$$\nabla^2\int_{\mathbb{R}^3} G(x,y)\ \rho(y)\ dy = \int_{\mathbb{R}^3}\nabla^2 G(x,y)\ \rho(y)\ dy = \int_{\mathbb{R}^3}\delta(x-y)\rho(y)\ dy = \rho(x)$$

La función $\rho(x) = \delta(x)$ representa una carga unitaria concentrada en un solo punto.
Así $G(x,y)$ representa el potencial en x debido a una carga colocada en y.

Ejercicio Muestre que

$$G(x,y) = \frac{-1}{4\pi\|x-y\|}$$

satisface

$$1)\quad G(x,y) = G(y,x)$$

$$2)\quad \nabla^2 G(x,y) = \delta(x-y)$$

Solución En este caso

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \frac{-1}{4\pi\|x-y\|} \\ &= \frac{-1}{4\pi\|y-x\|} \end{aligned}$$

$$= G(y, x)$$

por otro lado para mostrar que $\nabla^2 G(x, y) = \delta(x - y)$ debemos probar que

$$i) \quad \nabla^2 G(x, y) = 0 \quad para \quad x \neq y$$

$$ii) \quad \int_{\mathbb{R}} \nabla^2 G(x, y)\ dx = 1 \quad para \quad x \neq y$$

Para (i) se tiene

$$\begin{aligned}
\nabla^2 G(x, y) &= \nabla \cdot \nabla G \\
&= div(\nabla G) \\
&= div\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-1}{4\pi\|x - y\|}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-1}{4\pi\|x - y\|}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-1}{4\pi\|x - y\|}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4\pi} div\left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

por lo tanto $\nabla^2 G(x, y) = 0$
ahora bien para (ii) se tiene

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2\left(\frac{-1}{4\pi\|x - y\|}\right)\ dx \\
&= \int\int\int_w \nabla^2\left(\frac{-1}{4\pi\|x - y\|}\right)\ dv \\
&\underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ la \\ Divergencia}} \frac{1}{4\pi}\int\int_{Fr(w)} \nabla\left(\frac{-1}{\|x - y\|}\right) \cdot N\ ds \\
&= \int\int_{S=Fr(w)}\left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \cdot N\ ds
\end{aligned}$$

Ahora si consideramos una esfera S=Fr(W) con centro en el origen y radio $r > 0$ la cual podemos parametrizar

$$\phi(u, v) = (r\cos\ u \operatorname{sen}\ v, r\operatorname{sen}\ u \operatorname{sen}\ v, r\cos\ v)$$

donde $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi]$ por lo que

$$\int\int_S F(\phi(u, v)) \cdot N\ ds$$

$$= \int\int_S\left(\frac{1}{r^2}\right)(\cos\ u\operatorname{sen}\ v, \operatorname{sen}\ u\operatorname{sen}\ v, \cos\ v) \cdot (-r^2\operatorname{sen}\ v(\cos\ u\operatorname{sen}\ v, \operatorname{sen}\ u\operatorname{sen}\ v, \cos\ v))\ ds$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -\text{sen } v \; dv \; du$$
$$= 4\pi$$

por lo que

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{Fr(B(r,0))} \nabla\left(\frac{-1}{\|x-y\|}\right)\; dx$$
$$= \frac{1}{4\pi}(4\pi) = 1$$

por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2\left(\frac{-1}{4\pi\|x-y\|}\right)\; dx = 1$$

concluimos que

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{-\rho(y)}{4\pi\|x-y\|}\right)\; dy$$

es una solución de $\nabla^2 u = \rho$

Ejercicio Muestre que en $\mathbb{R}^2$

$$G(x,y) = \frac{\ln\left(\|x-y\|\right)}{2\pi}$$

satisface

$$1)\quad G(x,y) = G(y,x)$$
$$2)\quad \nabla^2 G(x,y) = \delta(x-y)$$

Solución En este caso

$$G(x,y) = \frac{\ln\left(\|x-y\|\right)}{2\pi}$$
$$= \frac{\ln\left(\|y-x\|\right)}{2\pi}$$
$$= G(y,x)$$

por otro lado para mostrar que $\nabla^2 G(x,y) = \delta(x-y)$ debemos probar que

$$i)\quad \nabla^2 G(x,y) = 0 \quad para \quad x \neq y$$

$$ii)\quad \int_{\mathbb{R}} \nabla^2 G(x,y)\; dx = 1 \quad para \quad x \neq y$$

Para (i) se tiene

$$\nabla^2 G(x,y) = \nabla\cdot\nabla G$$
$$= div(\nabla G)$$
$$= div\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\ln\left(\|x-y\|\right)}{2\pi}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\ln\left(\|x-y\|\right)}{2\pi}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi} div\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$
$$= 0$$

por lo tanto $\nabla^2 G(x,y)=0$
ahora bien para (ii) se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^2}\nabla^2\left(\frac{\ln(\|x-y\|)}{2\pi}\right)\,dx$$
$$= \int\int_s \nabla^2\left(\frac{\ln(\|x-y\|)}{2\pi}\right)\,ds$$
$$\underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ la\\ Green}} \frac{1}{2\pi}\int_{fr(s)}\frac{\partial}{\partial N}(\ln(\|x-y\|)\,ds$$
$$\underbrace{=}_{coordenadas\ polares} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}r\,dr$$
$$= \frac{1}{2\pi}(2\pi)=1$$

por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^2}\nabla^2\left(\frac{\ln(\|x-y\|)}{2\pi}\right)\,dx=1$$

concluimos que

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\rho(y)\ln(\|x-y\|)\,dy$$

es una solución de $\nabla^2 u=\rho$