El gradiente como límite de una integral de superficie

Dado un campo escalar $\varphi = \varphi(x, y, z)$ y un punto en el espacio $P = (x_0, y_0, z_0)$ contenido en el dominio del campo φ. Se define una superficie cerrada S alrededor del punto $P = (x_0, y_0, z_0)$
El gradiente del campo escalar puede definirse como

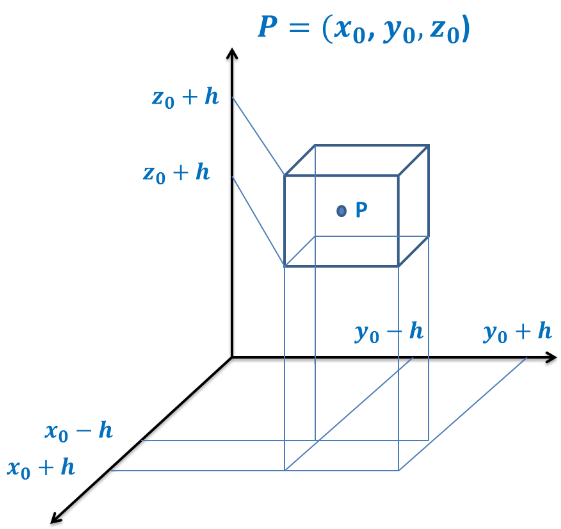
$$grad\ \varphi = \lim_{vol\ (S)} \frac{\oiint_S \varphi\ \overrightarrow{ds}}{vol\ (S)}$$

Ejercicio Comprobar que

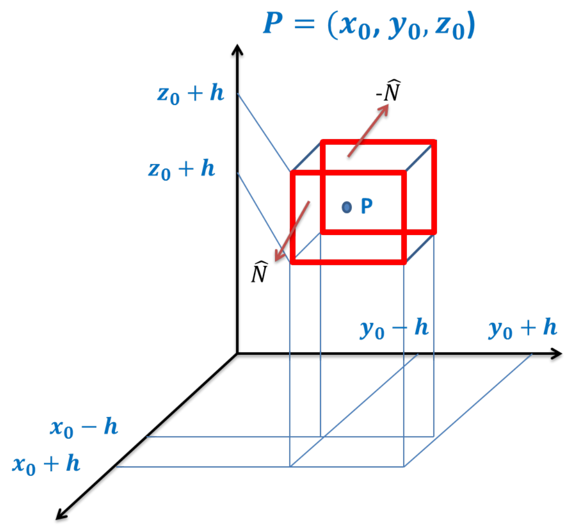
$$grad\ \varphi = \lim_{vol\ (S)} \frac{\oiint_S \varphi\ \overrightarrow{ds}}{vol\ (S)}$$

para la superficie

$$S = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - h, y_0 + h] \times [z_0 - h, z_0 + h]$$



Solución En este caso La definición de gradiente, aplicada a un volumen como el de la figura, genera seis integrales de superficie, una por cada cara del paralelepípedo. Vamos a trabajar las caras cuyo vector normal es paralelo al eje X



Cara Frontal

Una parametrización de la superficie que representa la cara frontal sería

$$[x_0 + h, y_0 + t, z_0 + t], \quad t \in [-h, h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([x_0+h, y_0+t, z_0+t])} \varphi([x_0 + h, y_0 + t, z_0 + h])\, \overrightarrow{dS_x} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor\\ madio\ integrales}} \varphi(x_0 + h, y_0 + \epsilon_y, z_0 + \epsilon_z) \cdot 4h^2$$

Cara Posterior

Una parametrización de la superficie que representa la cara posterior sería

$$[x_0 - h, y_0 + t, z_0 + h], \quad t \in [-h, h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([x_0-h, y_0+t, z_0+t])} \varphi([x_0 - h, y_0 + t, z_0 + h])\, \overrightarrow{dS_x} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor\\ madio\ integrales}} \varphi(x_0 - h, y_0 + \epsilon_y, z_0 + \epsilon_z) \cdot 4h^2$$

Por lo tanto

$$\int_{S_x} \varphi\, \overrightarrow{dS_x} = \int_{S([x_0+h, y_0+t, z_0+t])} \varphi([x_0+h, y_0+t, z_0+h])\, \overrightarrow{dS_x} - \int_{S([x_0-h, y_0+t, z_0+t])} \varphi([x_0-h, y_0+t, z_0+h])\, \overrightarrow{dS_x}$$

$$= \varphi(x_0 + h, y_0 + \epsilon_y, z_0 + \epsilon_z) \cdot 4h^2 - \varphi(x_0 - h, y_0 + \epsilon_y, z_0 + \epsilon_z) \cdot 4h^2$$

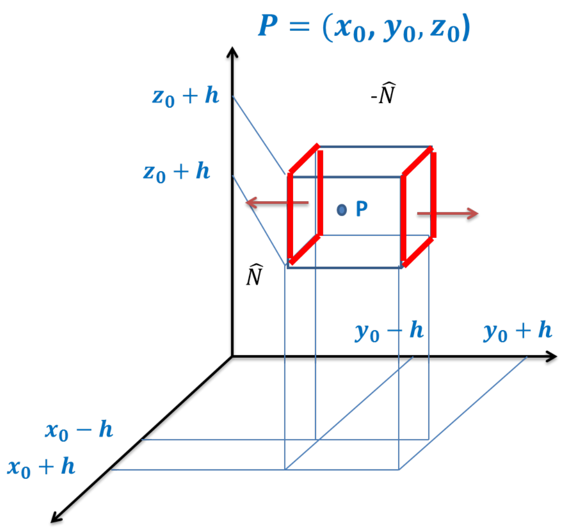
el signo del segundo término se debe a la orientación de la superficie que representa la cara posterior cuyo vector normal apunta hacia el vector $(-1,0,0)$

$$\underbrace{=}_{\substack{Teorema\ del\ valor\\ medio\ derivadas}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0+\epsilon, y_0+\epsilon_y, z_0+\epsilon_z)\cdot 8h^3$$

Por lo tanto

$$\int_{S_x} \varphi\ \overrightarrow{dS_x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0+\epsilon, y_0+\epsilon_y, z_0+\epsilon_z)\cdot 8h^3$$

Ahora procedemos con las caras laterales cuyo vector normal es paralelo al eje Y



Cara Lateral Derecha

Una parametrización de la superficie que representa la cara lateral derecha sería

$$[x_0+t, y_0+h, z_0+t], \quad t\in[-h,h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([x_0+t,y_0+h,z_0+t])} \varphi([x_0+t, y_0+h, z_0+t])\ \overrightarrow{dS_y} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor\\ madio\ integrales}} \varphi(x_0+\epsilon_u, y_0+h, z_0+\epsilon_v)\cdot 4h^2$$

Lateral Izquierda

Una parametrización de la superficie que representa la cara lateral izquierda sería

$$[x_0+t, y_0-h, z_0+t], \quad t\in[-h,h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([x_0+t,y_0-h,z_0+t])} \varphi([x_0+t, y_0-h, z_0+t])\, \overrightarrow{dS_y} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor\\ madio\ integrales}} \varphi(x_0+\epsilon_u, y_0-h, z_0+\epsilon_v)\cdot 4h^2$$

Por lo tanto

$$\int_{S_y} \varphi\, \overrightarrow{dS_x} = \int_{S([x_0+t,y_0+h,z_0+t])} \varphi([x_0+t, y_0+h, z_0+t])\, \overrightarrow{dS_y} - \int_{S([x_0+t,y_0-h,z_0+t])} \varphi([x_0+t, y_0-h, z_0+t])\, \overrightarrow{dS_y}$$

$$= \varphi(x_0+\epsilon_u, y_0+h, z_0+\epsilon_v)\cdot 4h^2 - \varphi(x_0-\epsilon_u, y_0-h, z_0+\epsilon_v)\cdot 4h^2$$

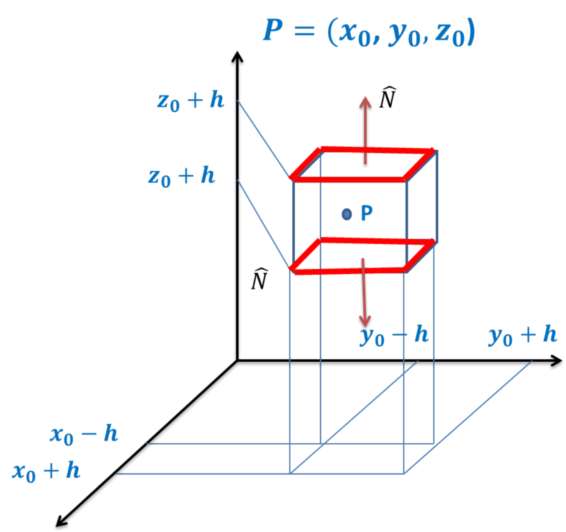
el signo del segundo término se debe a la orientación de la superficie que representa la cara posterior cuyo vector normal apunta hacia el vector $(0,-1,0)$

$$\underbrace{=}_{\substack{Teorema\ del\ valor\\ medio\ derivadas}} \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0+\epsilon_u, y_0+\epsilon_y, z_0+\epsilon_v)\cdot 8h^3$$

Por lo tanto

$$\int_{S_y} \varphi\, \overrightarrow{dS_y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0+\epsilon_u, y_0+\epsilon_y, z_0+\epsilon_z)\cdot 8h^3$$

Ahora procedemos con las caras laterales cuyo vector normal es paralelo al eje Z



Cara Superior

Una parametrización de la superficie que representa la cara superior sería

$$[x_0+t, y_0+t, z_0+h], \quad t\in[-h,h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([x_0+t,y_0+t,z_0+h])} \varphi([x_0+t,y_0+t,z_0+h])\ \overrightarrow{dS_z} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor\\ madio\ integrales}} \varphi(x_0+\epsilon_u,y_0+\epsilon_v,z_0+h)\cdot 4h^2$$

Cara Inferior

Una parametrización de la superficie que representa la cara inferior sería

$$[x_0+t,y_0+t,z_0+h], \quad t\in[-h,h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([x_0+t,y_0+t,z_0-h])} \varphi([x_0+t,y_0+t,z_0-h])\ \overrightarrow{dS_z} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor\\ madio\ integrales}} \varphi(x_0+\epsilon_u,y_0+\epsilon_v,z_0-h)\cdot 4h^2$$

Por lo tanto

$$\int_{S_z}\varphi\ \overrightarrow{dS_z} = \int_{S([x_0+t,y_0+t,z_0+h])} \varphi([x_0+t,y_0+t,z_0+h])\ \overrightarrow{dS_z} - \int_{S([x_0+t,y_0+t,z_0-h])} \varphi([x_0+t,y_0+t,z_0-h])\ \overrightarrow{dS_z}$$

$$= \varphi(x_0+\epsilon_u,y_0+\epsilon_v,z_0+h)\cdot 4h^2 - \varphi(x_0-\epsilon_u,y_0+\epsilon_v,z_0-h)\cdot 4h^2$$

el signo del segundo término se debe a la orientación de la superficie que representa la cara posterior cuyo vector normal apunta hacia el vector $(0,0,-1)$

$$\underbrace{=}_{\substack{Teorema\ del\ valor\\ medio\ derivadas}} \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x_0+\epsilon_u,y_0+\epsilon_v,z_0+\epsilon_z)\cdot 8h^3$$

Por lo tanto

$$\int_{S_z}\varphi\ \overrightarrow{dS_z} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x_0+\epsilon_u,y_0+\epsilon_v,z_0+\epsilon_z)\cdot 8h^3$$

Tenemos entonces que

$$\oiint_S \varphi\cdot\overrightarrow{dS} = \left(\int_{S_x}\varphi\ \overrightarrow{dS_x}, \int_{S_y}\varphi\ \overrightarrow{dS_y}, \int_{S_z}\varphi\ \overrightarrow{dS_z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0+\epsilon,y_0+\epsilon_y,z_0+\epsilon_z)\cdot 8h^3, \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0+\epsilon_u,y_0+\epsilon_y,z_0+\epsilon_z)\cdot 8h^3, \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x_0+\epsilon_u,y_0+\epsilon_v,z_0+\epsilon_z)\cdot 8h^3\right)$$

$$= 8h^3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0+\epsilon,y_0+\epsilon_y,z_0+\epsilon_z), \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0+\epsilon_u,y_0+\epsilon_y,z_0+\epsilon_z), \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x_0+\epsilon_u,y_0+\epsilon_v,z_0+\epsilon_z)\right)$$

Por lo tanto

$$\lim_{vol\ (S)\to 0}\frac{\oiint_S\varphi\ \overrightarrow{ds}}{vol\ (S)} = \lim_{vol\ (S)\to 0}\frac{1}{vol\ (s)}\left(\int_{S_x}\varphi\ \overrightarrow{dS_x}, \int_{S_y}\varphi\ \overrightarrow{dS_y}, \int_{S_z}\varphi\ \overrightarrow{dS_z}\right)$$

$$= \lim_{vol\ (S)\to 0} \frac{1}{8h^3} \cdot 8h^3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0+\epsilon, y_0+\epsilon_y, z_0+\epsilon_z), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0+\epsilon_u, y_0+\epsilon_y, z_0+\epsilon_z), \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x_0+\epsilon_u, y_0+\epsilon_v, z_0+\epsilon_z) \right)$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right)$$

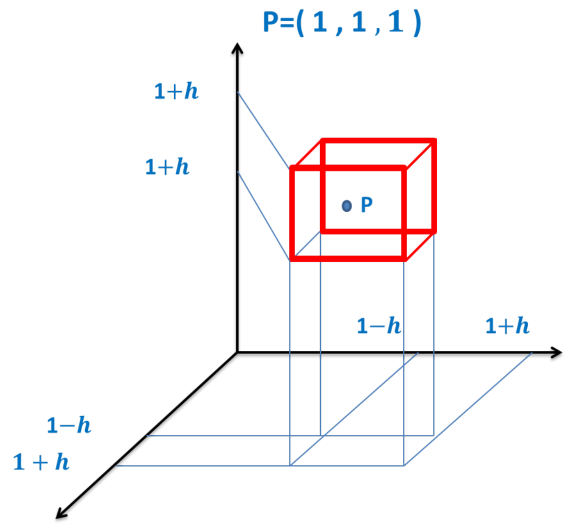
$$= grad\ \varphi(x_0, y_0, z_0)$$

$$= \nabla \varphi(x_0, y_0, z_0)$$

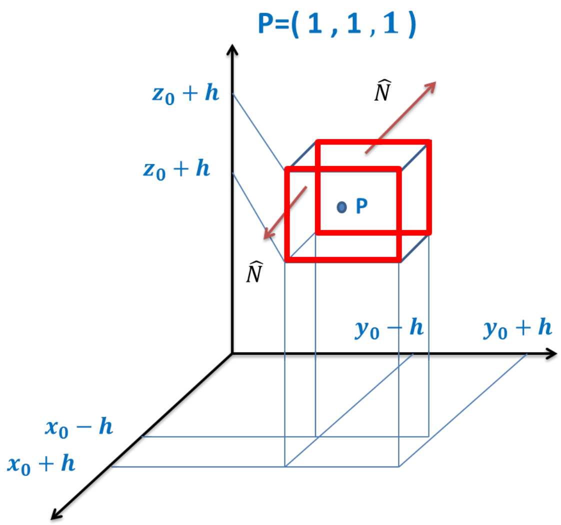
Ejemplo Calcular $\nabla\varphi(1,1,1)$ donde $\varphi(x,y,z) = x+y+z$

Solución En este caso consideremos la superficie

$$S = [1-h, 1+h] \times [1-h, 1+h] \times [1-h, 1+h]$$



Solución En este caso La definición de gradiente, aplicada a un volumen como el de la figura, genera seis integrales de superficie, una por cada cara del paralelepípedo. Vamos a trabajar las caras cuyo vector normal es paralelo al eje X



Cara Frontal

Una parametrización de la superficie que representa la cara frontal sería

$$[1+h, 1+t, 1+t], \quad t \in [-h, h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([1+h,1+t,1+t])} \varphi([1+h, 1+t, 1+h]) \, \overrightarrow{dS_x} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor \\ madio\ integrales}} \varphi(1+h, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z) \cdot 4h^2$$

Cara Posterior

Una parametrización de la superficie que representa la cara posterior sería

$$[1-h, 1+t, 1+h], \quad t \in [-h, h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([1-h,1+t,1+t])} \varphi([1-h, 1+t, 1+h]) \, \overrightarrow{dS_x} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor \\ madio\ integrales}} \varphi(1-h, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z) \cdot 4h^2$$

Por lo tanto

$$\int_{S_x} \varphi \, \overrightarrow{dS_x} = \int_{S([1+h,1+t,1+t])} \varphi([1+h, 1+t, 1+h]) \, \overrightarrow{dS_x} - \int_{S([1-h,1+t,1+t])} \varphi([1-h, 1+t, 1+h]) \, \overrightarrow{dS_x}$$

$$= \varphi(1+h, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z) \cdot 4h^2 - \varphi(1-h, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z) \cdot 4h^2$$

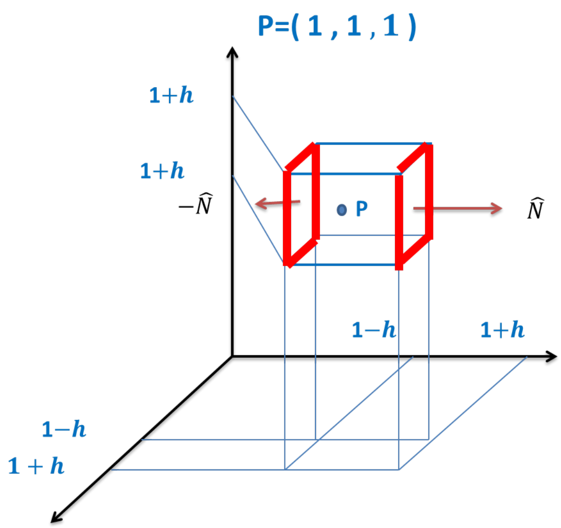
el signo del segundo término se debe a la orientación de la superficie que representa la cara posterior cuyo vector normal apunta hacia el vector $(-1,0,0)$

$$\underbrace{=}_{\substack{Teorema\ del\ valor\\ medio\ derivadas}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1+\epsilon, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z)\cdot 8h^3$$

Por lo tanto

$$\int_{S_x} \varphi\, \overrightarrow{dS_x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1+\epsilon, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z)\cdot 8h^3$$

Ahora procedemos con las caras laterales cuyo vector normal es paralelo al eje Y



Cara Lateral Derecha

Una parametrización de la superficie que representa la cara lateral derecha sería

$$[1+t, 1+h, 1+t], \quad t\in[-h,h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([1+t,1+h,1+t])} \varphi([1+t,1+h,1+t])\, \overrightarrow{dS_y} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor\\ madio\ integrales}} \varphi(1+\epsilon_u, 1+h, 1+\epsilon_v)\cdot 4h^2$$

Cara Lateral Izquierda

Una parametrización de la superficie que representa la cara lateral izquierda sería

$$[1+t, 1-h, 1+t], \quad t\in[-h,h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([1+t,1-h,1+t])} \varphi([1+t,1-h,1+t])\, \overrightarrow{dS_y} \underbrace{=}_{\substack{Teorema\ de\ valor\\ medio\ integrales}} \varphi(1+\epsilon_u, 1-h, 1+\epsilon_v)\cdot 4h^2$$

Por lo tanto

$$\int_{S_y} \varphi\, \overrightarrow{dS_x} = \int_{S([1+t,1+h,1+t])} \varphi([1+t,1+h,1+t])\, \overrightarrow{dS_y} - \int_{S([1+t,1-h,1+t])} \varphi([1+t,1-h,1+t])\, \overrightarrow{dS_y}$$

$$= \varphi(1+\epsilon_u, 1+h, 1+\epsilon_v)\cdot 4h^2 - \varphi(1-\epsilon_u, 1-h, 1+\epsilon_v)\cdot 4h^2$$

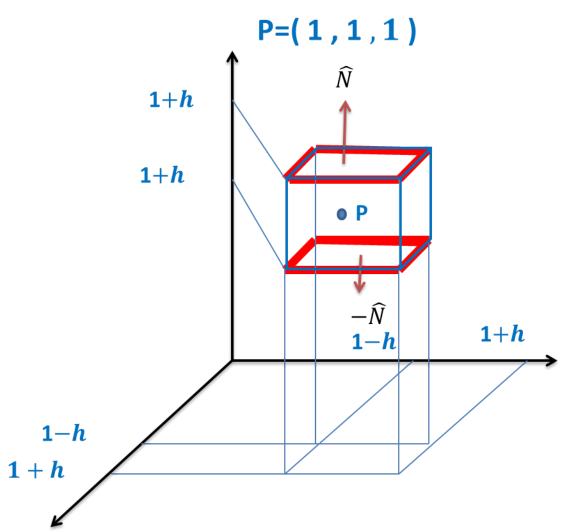
el signo del segundo término se debe a la orientación de la superficie que representa la cara posterior cuyo vector normal apunta hacia el vector $(0,-1,0)$

$$\underbrace{=}_{\substack{Teorema\ del\ valor\\ medio\ derivadas}} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1+\epsilon_u, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_v)\cdot 8h^3$$

Por lo tanto

$$\int_{S_y} \varphi\, \overrightarrow{dS_y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1+\epsilon_u, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z)\cdot 8h^3$$

Ahora procedemos con las caras laterales cuyo vector normal es paralelo al eje Z



Cara Superior

Una parametrización de la superficie que representa la cara superior sería

$$[1+t, 1+t, 1+h], \quad t \in [-h, h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([1+t,1+t,1+h])} \varphi([1+t,1+t,1+h])\,\overrightarrow{dS_z} \underbrace{=}_{\substack{\text{Teorema de valor}\\ \text{medio integrales}}} \varphi(1+\epsilon_u,1+\epsilon_v,1+h)\cdot 4h^2$$

Cara Inferior

Una parametrización de la superficie que representa la cara inferior sería

$$[1+t,1+t,1+h],\quad t\in[-h,h]$$

y podemos aproximar la integral de superficie por la función evaluada en un punto de la región, multiplicada por el área de la superficie, es decir

$$\int_{S([1+t,1+t,1-h])} \varphi([1+t,1+t,1-h])\,\overrightarrow{dS_z} \underbrace{=}_{\substack{\text{Teorema de valor}\\ \text{medio integrales}}} \varphi(1+\epsilon_u,1+\epsilon_v,1-h)\cdot 4h^2$$

Por lo tanto

$$\int_{S_z}\varphi\,\overrightarrow{dS_z} = \int_{S([1+t,1+t,1+h])} \varphi([1+t,1+t,1+h])\,\overrightarrow{dS_z} - \int_{S([1+t,1+t,1-h])} \varphi([1+t,1+t,1-h])\,\overrightarrow{dS_z}$$

$$= \varphi(1+\epsilon_u,1+\epsilon_v,1+h)\cdot 4h^2 - \varphi(1-\epsilon_u,1+\epsilon_v,1-h)\cdot 4h^2$$

el signo del segundo término se debe a la orientación de la superficie que representa la cara posterior cuyo vector normal apunta hacia el vector $(0,0,-1)$

$$\underbrace{=}_{\substack{\text{Teorema del valor}\\ \text{medio derivadas}}} \frac{\partial\varphi}{\partial z}(1+\epsilon_u,1+\epsilon_v,1+\epsilon_z)\cdot 8h^3$$

Por lo tanto

$$\int_{S_z}\varphi\,\overrightarrow{dS_z} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}(1+\epsilon_u,1+\epsilon_v,1+\epsilon_z)\cdot 8h^3$$

Tenemos entonces que

$$\oiint_S \varphi\cdot\overrightarrow{dS} = \left(\int_{S_x}\varphi\,\overrightarrow{dS_x},\int_{S_y}\varphi\,\overrightarrow{dS_y},\int_{S_z}\varphi\,\overrightarrow{dS_z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1+\epsilon,1+\epsilon_y,1+\epsilon_z)\cdot 8h^3, \frac{\partial\varphi}{\partial y}(1+\epsilon_u,1+\epsilon_y,1+\epsilon_z)\cdot 8h^3, \frac{\partial\varphi}{\partial z}(1+\epsilon_u,1+\epsilon_v,1+\epsilon_z)\cdot 8h^3\right)$$

$$= 8h^3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1+\epsilon,1+\epsilon_y,1+\epsilon_z), \frac{\partial\varphi}{\partial y}(1+\epsilon_u,1+\epsilon_y,1+\epsilon_z), \frac{\partial\varphi}{\partial z}(1+\epsilon_u,1+\epsilon_v,1+\epsilon_z)\right)$$

Por lo tanto

$$\lim_{vol\ (S)\to 0}\frac{\oiint_S\varphi\,\overrightarrow{ds}}{vol\ (S)} = \lim_{vol\ (S)\to 0}\frac{1}{vol\ (s)}\left(\int_{S_x}\varphi\,\overrightarrow{dS_x},\int_{S_y}\varphi\,\overrightarrow{dS_y},\int_{S_z}\varphi\,\overrightarrow{dS_z}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{vol\ (S)\to 0} \frac{1}{8h^3} \cdot 8h^3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1+\epsilon, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1+\epsilon_u, 1+\epsilon_y, 1+\epsilon_z), \frac{\partial \varphi}{\partial z}(1+\epsilon_u, 1+\epsilon_v, 1+\epsilon_z) \right) \\
&= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,1,1), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,1,1), \frac{\partial \varphi}{\partial z}(1,1,1) \right) \\
&= grad\ \varphi(1,1,1) \\
&= \nabla \varphi(1,1,1) \\
&= (1,1,1)
\end{aligned}
$$