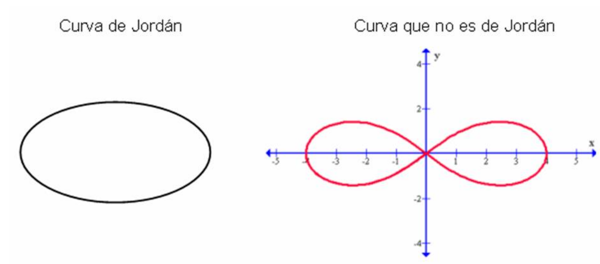
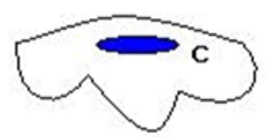
Teorema de Green

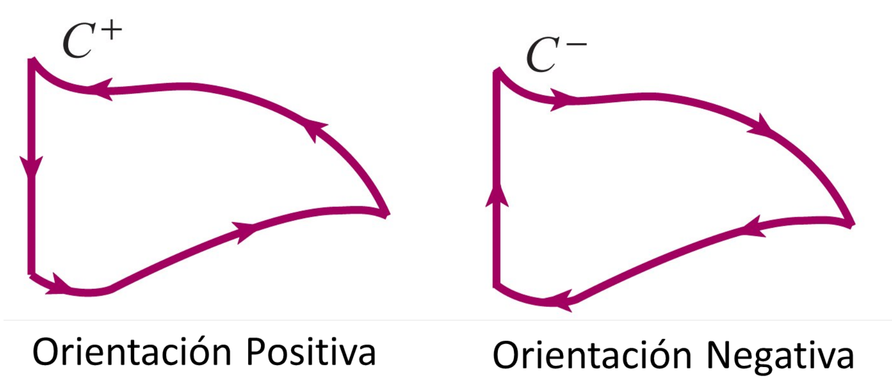
El teorema de Green relaciona una integral doble sobre una región del plano con una integral curvilínea sobre la frontera de la región.
Sea C una curva descrita por una función vectorial continua $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.
Si $\alpha(a) = \alpha(b)$ se dice que c es cerrada
Si $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2) \quad \forall\ t_1, t_2 \in (a,b]$ se dice que c es cerrada simple
Curva de Jordan.-: Es una curva cerrada simple en el plano



Región simplemente conexa.- Una región D es simplemente conexa si es conexa y el interior de toda curva de Jordan C contenida en D esta también contenida en D.



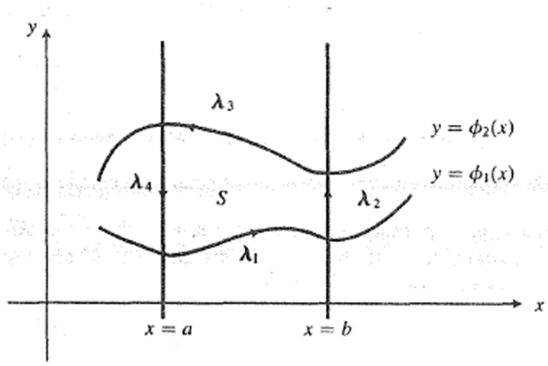
Una curva cerrada C que es la frontera de una región S tiene dos orientaciones, la contraria a las manecillas del reloj (positiva) que se puede denotar C^+ y la del sentido de las agujas del reloj (negativa), que se puede denotar C^-



Teorema 1. *Teorema de Green Sea S una región simplemente conexa con un borde C (suave) orientado positivamente. Si el campo vectorial $F(x,y) = M(x,y)\hat{\imath} + N(x,y))\hat{\jmath}$ es continuamente diferenciable en S tenemos que*

$$\int_C M \quad dx + N \quad dy = \int\int_S \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \; dxdy$$

Demostración. Primero demostraremos Teo. de Green para una región Tipo I. Supongamos que S es una región Tipo I con borde C.



En este caso se tiene que

$$C = \partial S = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$$

donde

$$\lambda_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \quad esta \quad dada \quad por \quad \lambda_1(t) = (t, \phi_1(t))$$

$$\lambda_2(t) = (b,t) \quad t \in [\phi_1(b), \phi_2(b)]$$

$$\lambda_3 : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \; esta \; dada \; por \; \lambda_3(t) = (a+b-t, \phi_2(a+b-t))$$

$$\lambda_4(t) = (a, \phi_1(a) + \phi_2(a) - t) \quad t \in [\phi_1(a), \phi_2(a)]$$

Tenemos que

$$C = \partial S = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$$

ahora bien si tomamos un campo en $\mathbb{R}^2$ dado por $F = [M(x,y), 0]$ se tiene que

$$\int_C F = \int_{\lambda_1} F + \int_{\lambda_2} F + \int_{\lambda_3} F + \int_{\lambda_4} F$$

$$= \int_a^b F(t, \phi_1(t)) \cdot (1, \phi'(t))dt + \int_{\phi_1(b)}^{\phi_2(b)} F(b,t) \cdot (0,1)dt$$

$$+ \int_a^b F(a+b-t, \phi_2(a+b-t)) \cdot (-1, -\phi_2'(a+b-t))dt + \int_{\phi_1(a)}^{\phi_2(a)} F(a, \phi_1(a) + \phi_2(a) - t) \cdot (0,-1)dt$$

$$= \int_a^b (M(t, \phi_1(t)), 0) \cdot (1, \phi'(t))dt + \int_{\phi_1(b)}^{\phi_2(b)} (M(b,t), 0) \cdot (0,1)dt$$

$$+ \int_a^b (M(a+b-t, \phi_2(a+b-t)), 0) \cdot (-1, -\phi_2'(t))dt + \int_{\phi_1(a)}^{\phi_2(a)} (M(a, \phi_1(a) + \phi_2(a) - t), 0) \cdot (0,-1)dt$$

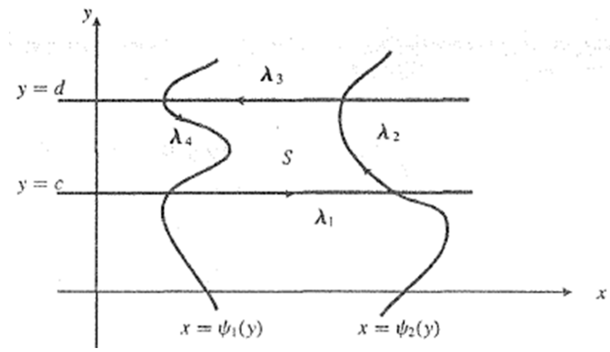
$$= \int_a^b M(t, \phi_1(t))dt + \int_a^b M(a+b-t, \phi_2(a+b-t))(-1)dt$$

$$= \int_a^b M(t, \phi_1(t))dt + \int_b^a M(t, \phi_2(t))dt$$

$$= \int_a^b M(t, \phi_1(t))dt - \int_a^b M(t, \phi_2(t))dt$$

$$-\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\, dy\, dx$$

Consideremos ahora la región como tipo II



En este caso se tiene que

$$C = \partial S = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$$

donde

$$\lambda_1 : [\psi_1(c), \psi_2(c)] \to \mathbb{R}^2 \ \ esta \ \ dada \ \ por \ \ \lambda_1(t) = (t, c)$$

$$\lambda_2(t) = (\psi_2(t), t) \quad t \in [c, d]$$

$$\lambda_3 : [\psi_1(d), \psi_2(d)] \to \mathbb{R}^2 \ \ esta \ \ dada \ \ por \ \ \lambda_3(t) = (\psi_1(d) + \psi_2(d) - t, d)$$

$$\lambda_4(t) = (\psi_1(c + d - t), c + d - t) \quad t \in [c, d]$$

ahora bien si tomamos un campo en $\mathbb{R}^2$ dado por $F = [0, N(x, y)]$ se tiene que

$$\int_C F = \int_{\lambda_1} F + \int_{\lambda_2} F + \int_{\lambda_3} F + \int_{\lambda_4} F$$

$$= \int_{\phi_1(c)}^{\phi_2(c)} F(t, c) \cdot (1, 0) dt + \int_c^d F(\phi_2(t), t) \cdot (\phi_2'(t), 1) dt$$

$$+ \int_{\phi_1(d)}^{\phi_2(d)} F(\phi_1(d) + \phi_2(d) - t, d) \cdot (-1, 0)) dt + \int_c^d F(\phi_1(c + d - t), c + d - t) \cdot (-\phi_1(c + d - t), -1) dt$$

$$= \int_c^d N(\phi_2(t), t) dt + \int_c^d N(\phi_1(c + d - t), c + d - t)(-1) dt$$

$$= \int_c^d N(\phi_2(t), t) dt - \int_c^d N(\phi_1(t), t) dt$$

$$\int_c^d \left(\int_{\psi_1(t)}^{\psi_2(t)} \frac{\partial N}{\partial x}\, dx \right) dt$$

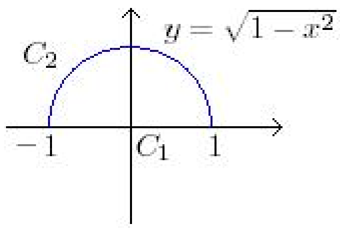
$$= \int \int_S \frac{\partial N}{\partial x}\, dx\, dy$$

por lo tanto

$$\int_{\partial S} F = \int\int_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \; dx \; dy$$

$\square$

Ejemplos: Compruebe que se verifica el teorema de Green para la integral curvilínea $\int_t -y \; dx + x \; dy$ donde C es la curva cerrada



$C_1(t) := (t, 0) \Rightarrow \quad x = t \quad y = 0 \quad -1 \leq t \leq 1$
$dx = dt \quad dy = 0$

$C_2(t) := (\cos(t), \sin(t)) \Rightarrow \quad x = \cos t \quad y = \sin t \quad t \in [0, \pi]$
$dx = -\sin t \quad dy = \cos t$

Por tanto $\int_C -y \; dx + x \; dy = \int_{C_1} -y \; dx + x \; dy + \int_{C_2} -y \; dx + x \; dy = \int_{-1}^{1} 0 \; dt + t - 0 + \int_0^{\pi} -\sin t$ $(-\sin t) + \cos t(\cos t) = \int_0^{\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \quad dt = \pi$

Ahora calculamos esa misma integral usando el teorema de Green. Observese que la curva frontera es simple y $M = -y \quad N = x$ luego $F(x, y) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$ es continuamente deferenciable. El dominio D esta definido por las relaciones $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \quad -1 \leq x \leq 1$. Aplicamos ahora el teorema de Green $\int_C -y \; dx + x \; dy = \int\int_D \frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y}(-y) = \int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 2 \quad dy \; dx = 2\frac{1}{2}(\pi) = \pi$